

ANGELO GRAZIOSI

SIMULAZIONE DI UNO SPETTROMETRO A GRADIENTE
DI CAMPO AD ALTA PRECISIONE

O Capitano! mio Capitano! il nostro viaggio tremendo è finito,
La nave ha superato ogni tempesta, l'ambito premio è vinto,...

— Walt Whitman

Dedicato alla cara memoria di Carlo Graziosi.

1934 – 1995

SOMMARIO

Nell'ambito dell'esperimento [MEG](#) per la ricerca del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$, vietato nel Modello Standard, è stata sviluppata una simulazione dello spettrometro per positroni. Una delle caratteristiche fondamentali di questo rivelatore è che esso utilizza un campo magnetico non omogeneo, a gradiente. La simulazione consiste nella realizzazione di due programmi: il Monte Carlo e il programma di Ricostruzione. Il primo simula il passaggio del positrone attraverso tutto l'apparato tenendo conto di tutti gli effetti fisici. Il secondo cerca di ricostruire le principali grandezze fisiche del positrone e le coordinate del vertice di decadimento del muone. In base ai risultati che abbiamo conseguito, il progetto dell'esperimento ha sostituito la configurazione piatta del sistema dei contatori a scintillazione, adottata inizialmente, con quella ruotata, in quanto si ottiene un miglioramento delle prestazioni del rivelatore.

ABSTRACT

In the framework of [MEG](#) experiment for the search of the $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ decay, prohibited in the Standard Model, we have done a simulation of positron spectrometer. One of the main property of this detector is that it uses a graded, inhomogeneous, magnetic field. The simulation is based on the development of two programs: the Montecarlo and the Reconstruction program. The first simulates the passage of positron through the full detector, taking care of all physical effects. The second tries to reconstruct the main kinematics of positron and muon decay vertex. On the grounds of our results, the experimental design of scintillator counters system has been changed passing from a flat configuration to the one which adopts rotated scintillator bars. Indeed the performances of the detector increase.

Fin dai primi anni della sua scoperta, il muone ha destato sempre grande interesse nella comunità dei fisici, soprattutto in relazione al decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ che, nell'ambito del Modello Standard, è proibito poiché viola la conservazione del numero leptonico. Tuttavia il Modello Standard, nonostante le molteplici conferme sperimentali, è soggetto ad un insieme di critiche che, nel corso degli anni, hanno portato alla formulazione di teorie più generali, nelle quali l'entità del processo $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ è valutata essere alla portata delle presenti possibilità sperimentali. Inoltre, i risultati ottenuti negli ultimi anni con gli esperimenti sulle oscillazioni dei neutrini, hanno determinato un grande interesse per la ricerca di processi nei quali il numero leptonico non è conservato.

Lo sviluppo della tecnologia nella produzione di fasci muonici di elevata intensità ha permesso di condurre esperimenti sempre più precisi che hanno abbassato il branching ratio per il processo $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$, fino al limite attuale di 10^{-11} . L'esperimento denominato Mu-E-Gamma experiment (MEG) si prefigge di abbassare tale limite di almeno altri due ordini di grandezza e, rispetto agli esperimenti precedenti, introduce il concetto innovativo di utilizzare un campo magnetico *a gradiente*. Un campo magnetico con tali caratteristiche dovrebbe migliorare le prestazioni dell'apparato, riducendo alcune fonti di rumore che hanno costituito la principale limitazione degli esperimenti fin qui condotti. Comunque, la riuscita dell'esperimento non può basarsi esclusivamente sulle prestazioni tecnologiche del rivelatore, ma necessita lo sviluppo di algoritmi che permettano un'efficace ricostruzione degli eventi registrati.

Le pagine che seguono sono dedicate alla descrizione dello studio che abbiamo condotto su una delle componenti principali dell'apparato di misura dell'esperimento MEG, cioè il rivelatore per i positroni. L'altra è costituita dal calorimetro a xenon liquido, ossia il rivelatore dei fotoni. Lo studio è stato svolto sviluppando una simulazione dello spettrometro magnetico dei positroni. Essa consiste principalmente nella realizzazione di due programmi: il Monte Carlo e il programma di Ricostruzione. Il primo simula il passaggio del positrone attraverso tutto l'apparato tenendo conto di tutti gli effetti fisici dovuti, soprattutto, ai diversi materiali attraversati. Il secondo cerca di ricostruire le principali grandezze fisiche del positrone, quali l'impulso, e le coordinate del vertice di decadimento del muone.

Nel capitolo 1, dopo un richiamo al Modello Standard, descriviamo brevemente alcune sue estensioni, con particolare riguardo alle previsioni sul decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$. Nel capitolo 2, invece, affrontiamo le più importanti problematiche che si manifestano nella ricerca su tale processo e quelli analoghi che violano la conservazione del numero leptonico. Con il capitolo 3 passiamo alla descrizione generale dell'esperimento MEG e dei suoi rivelatori principali. Nel capitolo 4 esponiamo la simulazione che abbiamo realizzato dello spettrometro per i positroni. I suoi principali risultati, invece, sono illustrati nel capitolo 5, dove riportiamo anche qualche conclusione.

INDICE

I La Teoria

- 1 Il muone e la fisica oltre il Modello Standard 3
 - 1.1 Un po' di storia 3
 - 1.2 Il Modello Standard 5
 - 1.2.1 L'invarianza di gauge 6
 - 1.2.2 La rottura spontanea di simmetria 6
 - 1.2.3 La lagrangiana del Modello Standard 8
 - 1.3 Oscillazioni di neutrini 12
 - 1.3.1 Alcuni risultati sulle oscillazioni di neutrini 12
 - 1.3.2 L'esperimento SNO 14
 - 1.4 Oltre il Modello Standard 16
 - 1.4.1 I Modelli di Supersimmetria 17
 - 1.4.2 Le Teorie di Grande Unificazione 19
 - 1.4.3 Modelli supersimmetrici con neutrini di Majorana 20
 - 1.5 Le previsioni sul decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ 21
 - 1.5.1 Le previsioni di SU(5) SUSY GUT 22
 - 1.5.2 Le previsioni di SO(10) SUSY GUT 24
 - 1.5.3 Le previsioni del MSSM con neutrini destrorsi 25
 - 1.5.4 Qualche considerazione finale 25

II L'esperimento

- 2 La ricerca del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ 29
 - 2.1 Segnatura e fondi per il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ 29
 - 2.2 Il fondo *fisico* 29
 - 2.3 Il fondo *accidentale* o *combinatorio* 32
 - 2.4 Muoni polarizzati e fondi 35
 - 2.5 Stato della ricerca sperimentale sul decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ 36
 - 2.6 Altri processi con la LFV 38
 - 2.6.1 Il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ 38
 - 2.6.2 La $\mu - e$ *conversion* 39
 - 2.6.3 La conversione *muonio-antimuonio* 41
- 3 L'esperimento MEG 43
 - 3.1 L'idea dell'esperimento 43
 - 3.2 Fascio e bersaglio 44
 - 3.2.1 Il fascio 44
 - 3.2.2 Il bersaglio 46
 - 3.3 Il rivelatore per i positroni 47
 - 3.3.1 Il magnete superconduttore 49
 - 3.3.2 Il sistema delle camere a *drift* 52
 - 3.3.3 Il sistema dei *Timing Counter* 53
 - 3.4 Il rivelatore dei fotoni 54
 - 3.5 Il sistema di acquisizione dati 56

III La Simulazione

- 4 Simulazione dello spettrometro COBRA 61
 - 4.1 Schema generale della simulazione 61
 - 4.2 Il calcolo delle mappe del campo 62
 - 4.3 Le applicazioni basate su GEANT 63

4.3.1	Inizializzazione	66
4.3.2	Elaborazione dell'evento	67
4.3.3	Sistemi di riferimento e volumi in GEANT	67
4.4	Il Monte Carlo	68
4.4.1	Definizione dell'apparato	68
4.4.2	La cinematica iniziale	79
4.4.3	<i>Tracking</i> e <i>hit</i>	81
4.4.4	L' <i>hit</i> sulle barrette esterne	82
4.4.5	L' <i>output</i> dell'elaborazione	83
4.5	Il programma di <i>Ricostruzione</i>	86
4.5.1	Strategia della ricostruzione	87
4.5.2	Inizializzazione	88
4.5.3	Ricostruzione	89
4.5.4	Il fit della traccia	93
4.5.5	L' <i>output</i> della ricostruzione	95
5	Risultati e conclusioni	97
5.1	Risultati ottenuti con il Monte Carlo	97
5.2	I risultati del programma di <i>Ricostruzione</i>	106
5.3	Conclusioni	112
 iv Appendici		
A	Il campo magnetico	117
A.1	Il campo di una spira circolare	117
A.1.1	Il calcolo di $I(k)$ e $J(k)$	120
A.2	Il campo del COBRA	123
B	Lo <i>spessore</i> del TOFF	125
B.1	Il metodo <i>approssimato</i> o <i>geometrico</i>	125
B.2	Il metodo <i>esatto</i> o <i>numerico</i>	125
C	Il vertice nel Monte Carlo	127
C.1	Le coordinate x_V e y_V	127
C.2	La coordinata z_V	128
C.3	Verifica del vertice	128
D	La definizione degli angoli d'impatto	129
Bibliografia		133

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1.1	Progressi nella ricerca della <i>Lepton Flavor Violation</i>	4
Figura 1.2	Forma del potenziale $\mathcal{V}(\phi)$	7
Figura 1.3	Grafico di Feynman per il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ nel <i>MSSM</i>	19
Figura 1.4	Il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ in <i>SU(5) SUSY GUT</i>	20
Figura 1.5	Il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ in <i>SO(10) SUSY GUT</i>	20
Figura 1.6	Il decadimento $\mu \rightarrow e \gamma$ nel Modello Standard	22
Figura 1.7	$B(\mu \rightarrow e \gamma)$ in <i>SU(5) SUSY GUT</i>	23
Figura 1.8	$B(\mu \rightarrow e \gamma)$ in <i>SO(10) SUSY GUT</i>	24
Figura 1.9	$B(\mu \rightarrow e \gamma)$ in <i>MSSM</i> con neutrino right-handed	25
Figura 2.1	Branching ratio per il decadimento radiativo del muone	33
Figura 2.2	Spettro differenziale del fotone nel decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma$	34
Figura 2.3	Intensità del fondo di fotoni	35
Figura 2.4	Distribuzione angolare dei positroni nel decadimento radiativo	36
Figura 2.5	Apparati sperimentali per la ricerca del $\mu \rightarrow e \gamma$	36
Figura 2.6	Il rivelatore <i>MEGA</i>	37
Figura 2.7	Il rivelatore <i>SINDRUM-II</i>	40
Figura 3.1	Vista schematica del rivelatore <i>MEG</i>	44
Figura 3.2	L'area $\pi E5$	46
Figura 3.3	Problemi in un campo magnetico solenoidale	48
Figura 3.4	Vantaggi in un campo magnetico a gradiente	48
Figura 3.5	Flusso di positroni di Michel in funzione della distanza radiale	49
Figura 3.6	Alcuni profili preliminari delle bobine	50
Figura 3.7	Particolari dei cavi superconduttori	50
Figura 3.8	Vista schematica 3-D del rivelatore <i>MEG</i>	51
Figura 3.9	La geometria del <i>COBRA</i>	51
Figura 3.10	Settore di una camera a deriva	52
Figura 3.11	Vista schematica del metodo dei pannelli <i>Vernier</i>	53
Figura 3.12	Schema di principio dei <i>TC</i>	53
Figura 3.13	Disposizione dei <i>TC</i> nel magnete <i>COBRA</i>	54
Figura 3.14	Il rivelatore di fotoni a Xenon liquido	55
Figura 4.1	Reticolo per il calcolo della mappa del campo magnetico	62
Figura 4.2	Mappe del campo magnetico	64
Figura 4.3	Mappa 3-D del campo magnetico	65
Figura 4.4	Le <i>shapes</i> <i>BOX</i> e <i>TUBE</i>	70
Figura 4.5	Relazione tra <i>DRS</i> e <i>MRS</i> nel posizionamento del bersaglio	71
Figura 4.6	Le <i>shapes</i> <i>TRD1</i> e <i>TUBS</i>	72
Figura 4.7	La costruzione del <i>DRCE</i>	73
Figura 4.8	<i>MRS</i> e <i>DRS</i> nel posizionamento delle camere	74
Figura 4.9	Volume radiale determinato dalla rotazione della barretta	75
Figura 4.10	Il confronto con il calcolo esatto di R_m e R_p	76

Figura 4.11	Schema del posizionamento delle strisce TCI	77
Figura 4.12	Schema del posizionamento delle barrette TCO	78
Figura 4.13	La distribuzione dello <i>stop</i> dei muoni nel bersaglio	79
Figura 4.14	Barrette colpite consecutivamente	83
Figura 4.15	Un decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$	84
Figura 4.16	Traccia di un positrone di Michel	85
Figura 4.17	Il fit per determinare $C = (x_C, y_C)$ e R_C	89
Figura 4.18	Il fit per determinare $d_0 \equiv \tan \lambda$ e z_0	90
Figura 4.19	Moto in un campo a simmetria assiale	92
Figura 4.20	Inclinazione della traccia con la dimensione trasversa della camera	94
Figura 5.1	Doppie e triple coincidenze	99
Figura 5.2	dE/dx con le doppie	100
Figura 5.3	Tempo d'impatto	100
Figura 5.4	Coordinata z d'impatto su TCO	102
Figura 5.5	Angolo d'impatto α	103
Figura 5.6	Angolo d'impatto β	104
Figura 5.7	Angolo d'impatto θ	104
Figura 5.8	Risoluzione sul <i>timing</i>	105
Figura 5.9	Ricostruzione della coordinata x del vertice	107
Figura 5.10	Ricostruzione della coordinata y del vertice	108
Figura 5.11	Ricostruzione della coordinata z del vertice	108
Figura 5.12	Ricostruzione della quantità di moto assoluta del positrone	109
Figura 5.13	Ricostruzione dell'angolo λ	109
Figura 5.14	Ricostruzione dell'angolo ϕ	110
Figura 5.15	Ricostruzione del tempo d'impatto sui TC	110
Figura 5.16	Ricostruzione del tempo d'impatto con una <i>gaussiana</i>	111
Figura 5.17	Ricostruzione del tempo d'impatto con una <i>breit-wigner</i>	111
Figura 5.18	Ricostruzione del tempo d'impatto con una <i>gaussiana</i> (1 giro)	112
Figura A.1	Le grandezze che figurano nella <i>legge di Biot e Savart</i>	118
Figura A.2	Proiezione sul piano XY della spira	118
Figura B.1	Configurazione <i>srotolata</i> delle barrette	125
Figura C.1	Determinazione del vertice di decadimento	127
Figura D.1	La definizione dell'angolo α	130
Figura D.2	La definizione dell'angolo β	130
Figura D.3	La definizione dell'angolo θ	131

ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 1.1	Campi di materia	5
Tabella 1.2	Bosoni di Gauge	6
Tabella 1.3	Sensibilità Δm^2 per gli esperimenti sulle oscillazioni di neutrini	13
Tabella 1.4	Le particelle nel MSSM	18

Tabella 2.1	Limiti sul branching ratio di alcuni processi LFV	30
Tabella 2.2	Risoluzioni (FWHM) e limiti nella ricerca per $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$	38
Tabella 2.3	Sommario delle ricerche sul decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$	39
Tabella 2.4	Sommario delle ricerche sulla $\mu - e$ conversion	40
Tabella 2.5	Sommario delle ricerche sulla conversione $\text{Mu} - \overline{\text{Mu}}$	41
Tabella 3.1	Principali caratteristiche del canale $\pi E5$	45
Tabella 3.2	Principali parametri dello Xenon liquido	55
Tabella 5.1	Michel isotropi (10^5 eventi generati)	98
Tabella 5.2	$\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ nell'accettazione del rivelatore (10^5 eventi generati)	98

ACRONIMI

AGAL	Active GAs Layer
APD	Avalanche Photo-Diode
AST	Il secondo magnete di curvatura
ASC	L'ultimo magnete di curvatura
BTS	Beam Transport Solenoid
BNL	Brookhaven National Laboratory
CERN	Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire
CERNLIB	CERN Program Library
CHOOZ	Esperimento sui neutrini
CKM	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
CNGS	Cern Neutrino to Gran Sasso
COBRA	COntant Bending RAdius spectrometer
CP	(Charge) Conjugation-Parity symmetry
DC	Drift Chamber
DRCE	DRift Chamber Element
DRS	Daughter Reference System
EW	Electro-Weak
FLUKA	Libreria per la simulazione di sciame adronici
FORTTRAN	FORmula TRANslation
FSF	Free Software Foundation
FWHM	Full Width at Half Maximum
GEANT	GEometry ANd Tracking

GHEISHA	Libreria per la simulazione di sciame adronici
GNU	GNU's Not Unix
GUT	Grand Unified Theories
HEP	High Energy Physics
HWHM	Half Width at Half Maximum
INFN	Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
JINR	Joint Institute for Nuclear Research
K2K	KEK to Kamioa
KARMEN	KARlsruhe Rutherford Medium Energy Neutrino experiment
KEK	Ko Enerugi Kasokuki Kenkyu Kiko
KGTL	Kapton Gas Tight Layer
LAMPF	Los Alamos Meson Physics Facility
LANL	Los Alamos National Laboratory
LEP	Large Electron-Positron Collider
LFV	Lepton Flavor Violation
LIFO	Last Input First Output
LXC	Liquid Xenon Calorimeter
LNGS	Laboratori Nazionali del Gran Sasso
LSND	Liquid Scintillator Neutrino Detector
MARS	MAster Reference System
MC	Monte Carlo
MEG	Mu-E-Gamma experiment
MEGA	Muon (decays to) an Electron and a Gamma ray experiment
MIDAS	Maximum Integration Data Acquisition System
MINUIT	Function Minimization and Error Analysis
MRS	Mother Reference System
MSSM	Minimal Super-Symmetric Standard Model
MSW	Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein
NDF	Number of Degrees of Freedom
OPAL	an Omni-Purpose Apparatus at LEP
OPERA	Oscillation Project with Emulsion-tRacking Apparatus
PAW	Physics Analysis Workstation
PDG	Particle Data Group

PSI	Paul Scherrer Institute
PTKF	Positron TracKer Frame
PTRK	Positron TRacKer
QED	Quantistic Electro-Dynamics
QCD	Quantistic Cromo-Dynamics
RC	Ricostruzione
ROOT	ROOT: an Object-Oriented analysis Toolset
SES	Single Event Sensitivity
SI	Sistema Internazionale
SIN	Schweizerisches Institut für Nuklearforschung
SINDRUM	Rivelatore presso il SIN
SINDRUM-II	Rivelatore presso il SIN
SNO	Sudbury Neutrino Observatory
SLC	Stanford Linear Collider
SLC₄	Scientific Linux CERN 4
SREL	Savannah River Ecology Laboratory
SUSY	Supersymmetry
TC	Timing Counter
TCI	Timing Counter Inner
TCO	Timing Counter Outer
TOF	Timing Of Flight
TOFF	Timing Of Flight Frame
TOFI	Timing Of Flight Inner
TOFO	Timing Of Flight Outer
TRANSPORT	A Computer Program For Designing Charged-Particle Beam Transport Systems
TRIUMF	TRI-University Meson Facility (University of British Columbia)
TURTLE	Trace Unlimited Rays Through Lumped Elements
VUV	Vacuum Ultra Violet

Parte I

LA TEORIA

...e le cose che stavano per capitare sono
troppo fantastiche per non raccontarle.

JACK KEROUAC, *Sulla Strada*

1.1 UN PO' DI STORIA

La storia del muone inizia nel 1937 quando Neddermeyer ed Anderson scoprirono nello studio dei raggi cosmici una particella con massa circa 200 volte quella dell'elettrone [Neddermeyer e Anderson, 1937]. Inizialmente si credette che questa nuova particella fosse quella postulata da Yukawa per spiegare la trasmissione delle interazioni forti [Yukawa, 1935]. Senonché, nel 1947, Conversi, Pancini e Piccioni dimostrarono che la particella scoperta da Neddermeyer ed Anderson non poteva essere quella immaginata da Yukawa poiché non interagisce forte [Conversi *et al.*, 1947].

Gli studi successivi misero in evidenza che il muone aveva proprietà simili, a parte la massa, a quelle dell'elettrone, tanto che viene indicato spesso come *il fratello pesante dell'elettrone*. A causa di queste caratteristiche, pare che I. Rabi fosse solito dire “Ma chi l’ha voluto?”, per sottolineare il fatto che, apparentemente, la sua scoperta non spiegava alcun fenomeno particolare.

Fu subito chiaro che la nuova particella avrebbe dato inizio a qualche rompicapo. Infatti se il muone era semplicemente il *fratello* pesante dell'elettrone, aveva, cioè, proprietà analoghe, allora sarebbe dovuto decadere in elettrone più un raggio γ .

I primi risultati sul decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ dovuti ad Hincks e Pontecorvo nel 1947, usando i muoni dei raggi cosmici, indicavano un *branching ratio* $B(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma) < 10\%$ [Hincks e Pontecorvo, 1948]. Successivamente, nel 1948, si stabilì che l'elettrone finale che si osserva nel decadimento del muone aveva uno spettro continuo, e ciò significava che il muone doveva avere un decadimento per lo meno a tre corpi: un elettrone e due particelle neutre [Steinberger, 1948]. Anche le ricerche sulla $\mu - e$ conversion, iniziate nel 1952 da Lagarrigue e Peyrou, diedero esito negativo [Lagarrigue e Peyrou, 1952]. L'avvento dei primi acceleratori e la possibilità di avere muoni prodotti artificialmente migliorarono notevolmente le ricerche e già nel 1955, Lokonathan e Steinberger avevano stabilito che $B(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma) < 2 \times 10^{-5}$ [Lokanathan e Steinberger, 1955], mentre Steinberger e Wolfe trovarono $B(\mu^- \text{Cu} \rightarrow e^- \text{Cu}) < 5 \times 10^{-4}$ [Steinberger e Wolfe, 1955].

A seguito della scoperta della violazione della parità, Feynman e Gell-Mann suggerirono, nel 1958, che le interazioni deboli si manifestano attraverso lo scambio di un bosone vettore intermedio carico [Feynman e Gell-Mann, 1958]. Nello stesso anno Feinberg dimostrò che se questo era il caso per $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ allora $B(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma) \approx 10^{-4}$ [Feinberg, 1958]. Ma la mancata osservazione del processo con $B > 2 \times 10^{-5}$, portò Nishijima e Schwinger a formulare l'ipotesi che esistessero due tipi di neutrino: il neutrino accoppiato con il muone ha proprietà differenti da quello che si accoppia con l'elettrone [Nishijima, 1957; Schwinger, 1957]. Tale ipotesi fu verificata speri-

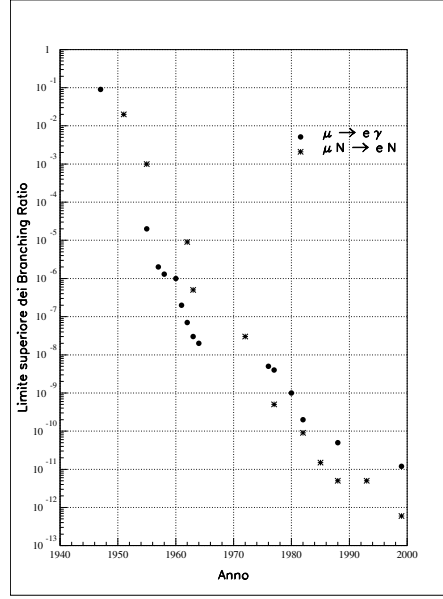


Figura 1.1: Progressi nella ricerca della *Lepton Flavor Violation*

mentalmente al Brookhaven National Laboratory (BNL) nel 1962 da Danby e collaboratori, i quali osservarono che le interazioni dei neutrini prodotti dal decadimento del pione producevano muoni e non elettroni [Danby *et al.*, 1962]. Conseguenza naturale di questa scoperta fu l'introduzione dell'ipotesi che ci doveva essere una conservazione separata dei numeri quantici leptonici: il numero leptonico dell'elettrone, L_e , e quello del muone, L_μ . Da ciò deriva pure che il processo $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ è *proibito*. Successivamente, con la scoperta del leptone τ , si completò l'ipotesi aggiungendo accanto alla conservazione di L_μ e L_e quella di L_τ .

Il problema con la conservazione di questi numeri quantici consiste nel fatto che, in *Teoria dei Campi*, la conservazione può essere garantita dall'esistenza di una *simmetria di gauge locale*, cioè di campi di gauge privi di massa. Questi campi sarebbero l'equivalente del fotone per l'invarianza di gauge locale $U(1)$ che, come noto, garantisce la conservazione della carica elettrica. Il fatto che non c'è nessuna evidenza sperimentale di questi campi induce a ritenere che il numero leptonico non sia una grandezza conservata e che debba esistere qualche *meccanismo* in base al quale risulti evidente la sua non conservazione.

Negli anni seguenti, le ricerche sperimentali condotte su $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ e altri processi correlati che violano la conservazione del numero leptonico, Lepton Flavor Violation (LFV), hanno determinato un abbassamento dei limiti superiori al branching ratio di circa due ordini di grandezza per decade, fino ad arrivare al limite attuale di 10^{-11} [Brooks *et al.*, 1999]. Questa evoluzione è mostrata nella figura 1.1, nella quale si riporta anche il parallelo progresso delle ricerche sulla $\mu - e$ conversion (§ 2.6.2, pag. 39).

Attualmente la teoria che meglio rappresenta i dati sperimentali è il Modello Standard. Esso, pur non proibendo la LFV, fornisce dei limiti che sono al di là di una osservazione sperimentale allo stadio odierno (§ 1.5, pag. 21). Tuttavia il Modello Standard si presta ad un certo numero di critiche, che verranno espone al § 1.4 di pagina 16, e che hanno portato alla formulazione di teorie allargate, come le teorie di *Super Simmetria*, Supersymmetry (SUSY). In molte di queste teorie l'entità dei processi di tipo LFV, in particolare

Tabella 1.1: Campi di materia

1 ^a Famiglia	2 ^a Famiglia	3 ^a Famiglia	Q/e
u	c	t	+2/3
d	s	b	-1/3
ν_e	ν_μ	ν_τ	0
e	μ	τ	-1

del processo $\mu \rightarrow e\gamma$, è stimata essere molto più alta che non nel Modello Standard, fino ad essere entro i limiti delle presenti possibilità sperimentali.

Nei paragrafi successivi verranno presentati i principi del Modello Standard e quelli delle teorie alternative più in voga, ed alla fine verranno indicati, per alcune di queste teorie, le predizioni teoriche per il branching ratio del processo $\mu \rightarrow e\gamma$.

1.2 IL MODELLO STANDARD

La complessità dei fenomeni che coinvolgono le particelle elementari è spiegata, attualmente, dall'interazione di un numero limitato di particelle: i *quark* e i *leptoni*. Queste particelle, che sono considerate veramente *elementari* (cioè prive di struttura interna), sono classificate in tre famiglie fondamentali, ciascuna delle quali contiene una coppia di particelle.

La prima famiglia di quark contiene i quark *up* (u) e *down* (d), che sono i mattoni con cui sono costituiti i nuclei atomici (cioè, prevalentemente, la materia ordinaria). L'analoga famiglia per i leptoni è costituita dall'*elettrone* (e) e dal corrispondente *neutrino* (ν_e). La seconda e terza famiglia includono, rispettivamente, i quark *charm* (c) e *strange* (s), *top* (t) e *bottom* (b); per i leptoni si ha, similmente, il *muone* (μ) e il *neutrino muonico* (ν_μ), la particella *tau* (τ) e il *neutrino tau* (ν_τ). Naturalmente a queste particelle è necessario aggiungere le rispettive antiparticelle. Tutte hanno spin $s = 1/2$ e sono, perciò, fermioni: esse, nel loro insieme, costituiscono i *campi di materia* (*matter field*, tab. 1.1).

Oltre alle *matter particles*, ci sono le particelle che *mediano* le loro interazioni. Esse sono *bosoni* a spin $s = 1$. Il *fotone* (γ), come noto, è scambiato nelle interazioni elettromagnetiche; quelle forti sono mediate da otto *gluoni*, mentre le interazioni deboli sono causate dallo scambio dei bosoni W^\pm e Z^0 (tab. 1.2). Le interazioni forti agiscono solo tra i quark, le elettromagnetiche coinvolgono sia i quark che i leptoni carichi, quelle deboli agiscono sia tra i leptoni che i quark. I neutrini hanno solo interazione debole. Tra le interazioni non è citata la gravità che, data la sua debole intensità, per ora, è sperimentalmente irrilevante. Il suo mediatore sarebbe il *gravitone* il quale, a differenza degli altri bosoni, ha spin $s = 2$ (conseguenza, questa, del fatto che la gravità è solo attrattiva).

Il modello logico da cui deriva lo schema sopra delineato è noto come *Modello Standard*. Esso è la sintesi di due teorie fondamentali: la *Teoria Elettrodebole* (il modello di *Glashow-Weinberg-Salam*) e la *Cromodinamica quantistica*, *Quantistic Chromo-Dynamics* (*QCD*). I principi cardini su cui si fonda sono l'*invarianza di gauge locale* e la *rottura spontanea di simmetria*.

Di seguito ne illustreremo le caratteristiche principali senza entrare nei dettagli per i quali si possono consultare appositi testi [Mandl e Shaw, 1984; Halzen e Martin, 1984; Lee, 1981].

Tabella 1.2: Bosoni di Gauge

Interazione	Mediatore	Q/e
Elettromagnetica	γ	0
Debole	W^+	+1
	W^-	-1
	Z^0	0
Forte	g_i ($i = 1, \dots, 8$)	0

1.2.1 L'invarianza di gauge

Il modello assume inizialmente tutte le particelle non interagenti e a massa nulla. Questo ne fa una teoria di gauge invariante per trasformazioni *globali* (tipo e^{iq}), ma ovviamente non una teoria fisica, essenzialmente descritta da lagrangiane del tipo

$$\mathcal{L}^f = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi, \quad \mathcal{L}^b = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi$$

per i fermioni (f) e i bosoni (b), rispettivamente.¹ Imponendo che essa risulti invariante per trasformazioni di gauge locali (come $e^{iqf(x)}$), ne risulta che le derivate ordinarie, ∂_μ , vanno sostituite da quelle covarianti, ad esempio

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu,$$

in cui i campi di gauge A_μ sono i mediatori dell'interazione.² In altri termini, l'aver richiesto che la teoria risulti invariante per trasformazioni di gauge *locali* introduce l'interazione tra le particelle.³ Ma non le masse. Se si aggiungessero *ad hoc* dei termini di massa ($m\bar{\psi}\psi$, $m^2\phi^\dagger\phi$) la teoria perderebbe una delle caratteristiche fondamentali: la rinormalizzabilità e quindi la possibilità di eseguire calcoli perturbativi agli ordini più elevati. In aggiunta, la teoria non sarebbe più gauge invariante.

Fortunatamente l'introduzione della rottura spontanea di simmetria attraverso il meccanismo di Higgs comporta non solo che le particelle acquistino massa ma anche che la teoria rimanga gauge invariante (per trasformazioni locali) e rinormalizzabile.

1.2.2 La rottura spontanea di simmetria

La rottura spontanea di simmetria si manifesta nei sistemi che, pur presentando delle simmetrie rispetto ad un gruppo di trasformazioni, hanno uno stato fondamentale che non mostra la stessa simmetria. Ciò succede quando questo è degenere, ossia ne esiste più di uno atto ad assumere tale ruolo. Un tipico esempio di sistema con rottura spontanea di simmetria è quello dei materiali ferromagnetici. In questi le forze che accoppiano gli spin elettronici sono invarianti per rotazioni. Nello stato fondamentale, però, gli spin sono

¹ Di seguito utilizzeremo, ove necessario, le notazioni $\not{A} = A_\mu\gamma^\mu$ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, con γ^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, le *matrici di Dirac* [Mandl e Shaw, 1984]

² L'esempio è quello dell'elettrodinamica quantistica, Quantistic Electro-Dynamics (QED).

³ La tecnica di rendere una teoria di gauge, invariante per trasformazioni locali, è stata applicata per la prima volta da Yang e Mills [Yang e Mills, 1954] e le teorie basate su di essa sono chiamate *teorie di Yang-Mills*.

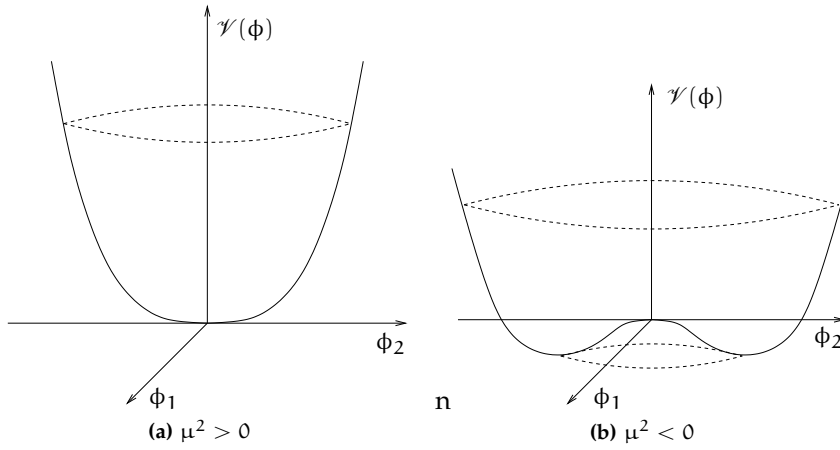


Figura 1.2: Forma del potenziale $\mathcal{V}(\phi)$

allineati lungo una certa direzione e il risultato è che il materiale acquista una magnetizzazione \mathbf{M} lungo quella direzione la quale, essendo arbitraria, comporta uno stato fondamentale degenere, non unico. Il fatto che \mathbf{M} punti in una direzione piuttosto che in un'altra costituisce la rottura spontanea di simmetria.

In *Teoria dei Campi* lo stato fondamentale è quello di vuoto e si può avere una rottura spontanea di simmetria solo se questo stato è degenere, cioè non unico – idea questa, suggerita per la prima volta, nell'ambito della teoria della superconduttività, da Nambu e Jona-lasino [Nambu e Jona-Lasinio, 1961a,b]. Questo significa che esiste, nello stato di vuoto, qualche quantità non nulla, non invariante sotto le trasformazioni di simmetria del sistema. Tale quantità può essere, allora, utilizzata per identificare un particolare stato di vuoto come stato fondamentale.

L'esempio più semplice di sistema che presenta la rottura spontanea di simmetria è quello descritto dalla seguente lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mathcal{V}(\phi)$$

in cui il potenziale $\mathcal{V}(\phi)$ è

$$\mathcal{V}(\phi) = \mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

e ϕ è il campo scalare complesso

$$\phi = \frac{\phi_1 + i \phi_2}{\sqrt{2}}$$

con μ^2 e λ parametri reali. Affinché l'energia del sistema sia limitata inferiormente deve essere $\lambda > 0$.

Se $\mu^2 > 0$ allora $\mathcal{V}(\phi)$ ha la forma di un paraboloide (fig. 1.2a), è definito positivo e presenta un unico minimo per $\phi = 0$, cioè un unico stato fondamentale non degenere: in questo caso non ci può essere rottura spontanea di simmetria.

Se, al contrario, $\mu^2 < 0$, la forma del potenziale è quella di un cappello

messicano (fig. 1.2b), con un massimo per $\phi = 0$ e un'intera circonferenza di minimi assoluti per

$$\phi = \phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} e^{i\theta},$$

essendo θ una direzione nel piano complesso ϕ .

In questo caso lo stato di vuoto, cioè il minimo di $\mathcal{V}(\phi)$, non è unico: l'arbitrarietà di θ è simile a quella delle direzioni della magnetizzazione \mathbf{M} in un ferromagnete. Scegliere un particolare valore di θ per rappresentare lo stato fondamentale determina la rottura spontanea di simmetria.

Scegliendo $\theta = 0$, lo stato fondamentale è determinato da un valore puramente reale

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Introducendo le deviazioni del campo dallo stato fondamentale,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \sigma + i\eta)$$

la lagrangiana può riscriversi in termini di σ e η

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \sigma^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) \\ & + \mathcal{O}(\sigma^3, \eta^3). \end{aligned}$$

Come si vede in questo semplice modello, con la rottura spontanea di simmetria siamo passati da una lagrangiana che descrive fondamentalmente particelle con massa immaginaria ($\mu^2 < 0$) ad una che, nel caso del campo σ , descrive particelle scalari con massa $\sqrt{2\lambda v^2}$ mentre nell'altro, η , le particelle rimangono a massa nulla. L'ultimo termine in \mathcal{L} , invece, è l'interazione tra i campi σ e η .

1.2.3 La lagrangiana del Modello Standard

Il Modello Standard è una teoria di gauge invariante per trasformazioni appartenenti al gruppo di simmetria $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Il gruppo $SU(3)_C$ ne descrive la parte forte (QCD) [Gell-Mann, 1964; Zweig, 1964], mentre la simmetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ governa il settore elettrodebole, Electro-Weak (EW), del modello [Glashow, 1961].

La Cromodinamica quantistica è la teoria delle interazioni forti ed è sintetizzata dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sum_q i \bar{q} \not{D} q - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$$

in cui $q = (q_1, q_2, q_3)$ è il tripletto di colore dei quark e la somma è estesa ai loro sapori.

Il primo termine attraverso la derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s \frac{\lambda_i}{2} G_\mu^i$$

representa l'interazione tra i quark. I mediatori dell'interazione sono i *gluoni* descritti dai campi di gauge G_μ^i ($i = 1, \dots, 8$) ed accoppiano quark di diverso *colore* ma dello stesso *sapore*; g_s è la *costante di accoppiamento forte* e λ_i sono le matrici di *Gell-Mann*, generatrici del gruppo $SU(3)$.

Il secondo termine costituisce l'interazione tra i gluoni stessi ed è determinato dal tensore di campo gluonico

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu G_\mu^i - \partial_\mu G_\nu^i + g_s f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k$$

dove f_{ijk} sono le *costanti di struttura* di $SU(3)$, definite attraverso le regole di commutazione delle matrici di Gell-Mann

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}.$$

Il fatto che nella **QCD** ci sia interazione tra i campi di gauge, la rende una *teoria non abeliana*.

La parte *elettrodebole* del modello può essere riassunta dalla seguente lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^F + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{FH}.$$

Il settore *fermionico* è dato da

$$\mathcal{L}^F = \sum_{f=q,l} (\bar{f}_L \not{D} f_L + \bar{f}_R \not{D} f_R)$$

in cui la derivata covariante per i doppietti di $SU(2)$ è definita come

$$D_\mu f_L = \left(\partial_\mu + i g \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + i g' Y B_\mu \right) f_L$$

mentre per i singoletti

$$D_\mu f_R = \left(\partial_\mu + i g' Y B_\mu \right) f_R.$$

τ_i sono le *matrici di Pauli*, i *generatori* del gruppo $SU(2)$,

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}.$$

Y è l'*ipercarica debole* legata alla carica elettrica Q e alla terza componente dell'*isospin debole*, I_3^W , dalla relazione

$$Q = I_3^W + Y.$$

I campi fermionici sono definiti da

$$f_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \dots$$

ed hanno isospin debole $I^W = 1/2$; l'ipercarica debole vale $Y = -1/2$, per i leptoni, e $Y = 1/6$ per i quark. Per i singoletti la definizione è

$$f_R = e_R, u_R, d_R, \dots$$

con $I^W = 0$ e $Y = Q$. L e R indicano le proiezioni sugli stati di elicità, *left* e *right*, dei corrispondenti campi

$$f_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} f, \quad f_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} f, \quad \gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3.$$

Il settore di gauge ha come lagrangiana

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu}$$

dove

$$B_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu W_\mu^i - \partial_\mu W_\nu^i + g \epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$$

sono i tensori associati ai campi di gauge B_μ e W_μ^i ($i = 1, 2, 3$). B_μ è associato all'invarianza $U(1)_Y$, mentre i campi reali W_μ^i sono quelli che scaturiscono dall'invarianza $SU(2)_L$; g e g' sono le rispettive *costanti di accoppiamento debole*: esse non sono indipendenti ma in relazione con la carica elementare elettronica $e > 0$,

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$$

con θ_W , l'angolo di *miscelamento debole* o *angolo di Weinberg*. ϵ_{ijk} è il *tensor di Levi-Civita*, completamente antisimmetrico, di ordine 3.

Come si vede, nelle lagrangiane descritte finora non compaiono i termini di massa. Questi vengono generati dal *meccanismo di Higgs* [Higgs, 1964] con il quale è possibile introdurre la rottura spontanea di simmetria attraverso la lagrangiana

$$\mathcal{L}^H = D^\mu \Phi^\dagger D_\mu \Phi - \mathcal{V}(\Phi)$$

$$\mathcal{V}(\Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

in cui $\Phi = (\phi_a, \phi_b)$ è un campo scalare complesso, doppietto di $SU(2)$, con $I^W = 1/2$ e $Y = 1/2$. Anche in questo caso, per i doppietti, la derivata covariante è definita come in precedenza

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu + i g \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + i g' Y B_\mu \right) \Phi.$$

Naturalmente la rottura spontanea di simmetria si manifesta per $\lambda > 0$ e $\mu^2 < 0$: il potenziale \mathcal{V} ammette un insieme di minimi per $\Phi = \Phi_0 = (\phi_a^0, \phi_b^0)$ tale che

$$\Phi_0^\dagger \Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}.$$

Utilizzando il valore reale

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v = (-\mu^2/\lambda)^{1/2} > 0$$

si ha la rottura spontanea di simmetria. Parametrizzando il campo di Higgs, Φ , con le deviazioni dal vuoto, Φ_0 ,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ v + \sigma + i\eta_3 \end{pmatrix}$$

si può dimostrare [Mandl e Shaw, 1984] che i campi di gauge associati alle particelle W^\pm e Z^0

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)$$

$$Z_\mu = -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3$$

acquistano la massa

$$m_W = \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}$$

mentre il campo del fotone

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3$$

rimane a massa nulla.

Tutto ciò, però, non determina le masse dei fermioni. Queste sono generate dall'ultimo termine, \mathcal{L}^{FH} , della lagrangiana elettrodebole, il cosiddetto *termine di Yukawa* che accoppia i fermioni con il campo di Higgs. La sua struttura è

$$\mathcal{L}^{FH} = \sum_l -g_{\nu_l} (\bar{l}_L \nu_{lR} \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\nu}_{lR} l_L) + \sum_{f=q,l} -g_{f'f} (\bar{f}'_L f_R \Phi + \Phi^\dagger \bar{f}_R f'_L)$$

con $\tilde{\Phi} = -i[\Phi^\dagger \tau_2]^T$. Anche in questo caso, lo sviluppo del campo Φ attorno al vuoto Φ_0 genera le masse dei fermioni. Ad esempio per i leptoni

$$m_l = \frac{g_l v}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{g_{\nu_l} v}{\sqrt{2}}.$$

Così come è scritto, il termine in g_{ν_l} non solo introduce la massa per i leptoni carichi, ma anche per quelli neutri, cioè i neutrini! In effetti, nella loro formulazione originaria, Weinberg e Salam [Weinberg, 1967; Salam, 1968] ponevano $g_{\nu_l} = 0$, e i neutrini rimanevano con massa nulla: a quel tempo gli esperimenti sulla massa dei neutrini ponevano solo un limite superiore di qualche decina di eV ed era naturale assumere quell'ipotesi; solo successivamente, alla fine degli anni settanta, si sono ottenute delle indicazioni su un limite inferiore di circa 20 eV [Shaevitz, 1983; Lyubimov, 1980].

Effettivamente, questa parte di lagrangiana in g_{ν_l} può essere sostituita da un'espressione più generale

$$\sum_{l'l} - (G_{l'l} \bar{l}'_L \nu_{lR} \tilde{\Phi} + G_{l'l}^* \tilde{\Phi}^\dagger \bar{\nu}_{lR} l'_L)$$

dove G è una matrice *hermitiana* di costanti d'accoppiamento. Con questa generalizzazione, non solo i neutrini acquistano massa ma possono dare origine alla *LFV*. Infatti, diagonalizzando la precedente espressione, si ottengono gli autostati di neutrino ν_i ($i = 1, 2, \dots$) con masse m_i e i neutrini leptonici ordinari ν_l ($l = e, \mu, \dots$) risultano delle combinazioni lineari degli autostati ν_i . Come conseguenza si verifica un *miscelamento* dei neutrini,⁴ il quale dà luogo al fenomeno delle *oscillazioni di neutrini* [Bilenky e Pontecorvo, 1978; Maki *et al.*, 1962].

1.3 OSCILLAZIONI DI NEUTRINI

Per semplicità, consideriamo il *miscelamento* di due soli sapori (ν_μ e ν_e). Allora possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

in cui α è l'*angolo di miscelamento* e ν_1, ν_2 sono gli autostati di massa. Quanto scritto ci dice che se un acceleratore produce un fascio puro di ν_μ , la composizione di questo cambia lungo il percorso, divenendo sempre più contaminato da ν_e , fino a diventare un fascio puro di ν_e . Si può dimostrare [Perkins, 1982] che la probabilità della transizione $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, dopo che il fascio di energia E ha percorso la distanza L , è data da

$$\mathcal{P}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 2\alpha \sin^2 \left[\frac{(m_2^2 - m_1^2)L}{4E} \right],$$

avendo fatto l'ipotesi che $E \gg m_i$. Quindi per $\alpha \neq 0$, si può osservare l'*oscillazione* $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, cioè la violazione della conservazione del numero leptonico, ad una distanza $L \sim E/(m_1^2 - m_2^2)$ dalla sorgente.

Come si vede, nel Modello Standard non è preclusa la possibilità della *LFV*, solo che la difficoltà di mettere in evidenza sperimentale l'oscillazione dei neutrini, e quindi la loro massa, ha portato a sviluppare il modello preferenzialmente con $g_{\nu_l} = 0$, cioè $m_\nu = 0$ e, conseguentemente, vietando la *LFV*.

I risultati degli esperimenti sull'oscillazione dei neutrini, condotti negli ultimi anni [Cleveland *et al.*, 1998; Fukuda *et al.*, 1998, 1999; Kielczewska *et al.*, 2000; Fukuda *et al.*, 2001], hanno cambiato la situazione, aprendo la via a nuovi scenari.

1.3.1 Alcuni risultati sulle oscillazioni di neutrini

La sensibilità degli esperimenti sulle oscillazioni di neutrini è caratterizzata dalla grandezza $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$, differenza tra i quadrati delle masse di due specie di neutrini.

I principali parametri che determinano Δm^2 sono la distanza L , tra il punto di produzione dei neutrini e il rivelatore, e l'energia E del fascio di neutrini. La tabella 1.3 riassume gli ordini di grandezza tipici di questi parametri per varie classi di esperimenti, mentre quanto segue riepiloga, brevemente, i principali risultati.

⁴ Il *miscelamento* altri non è che il *principio di sovrapposizione della Meccanica Quantistica*.

Tabella 1.3: Sensibilità Δm^2 per gli esperimenti sulle oscillazioni di neutrini

Sorgente di neutrini	L (m)	E (MeV)	Δm^2 (eV ²)
Sole	10^{11}	1	10^{-11}
Atmosfera	10^7	10^4	10^{-3}
Reattore	10^2	1	10^{-2}
Acceleratore	10^{-3}	10^3	1

ESPERIMENTI CON NEUTRINI SOLARI All'interno del Sole i neutrini elettronici sono prodotti dalle reazioni nucleari. La distanza è circa 1.5×10^8 km. Le energie, invece, vanno da circa 100 keV a circa 15 MeV (a seconda del tipo di reazione che ha prodotto i neutrini). Questo significa che tali esperimenti sono sensibili ad un $\Delta m^2 < 10^{-11}$ eV². I metodi di rivelazione consistono nel misurare il numero di radioisotopi prodotti nelle reazioni indotte dai neutrini. I risultati indicano un sostanziale deficit rispetto al flusso previsto dalle conoscenze attuali del Sole (*Modello Standard Solare*). Il più importante risultato in quest'ambito è stato ottenuto con l'esperimento denominato *Sudbury Neutrino Observatory* (*SNO*), di cui parleremo più approfonditamente al § 1.3.2 a pagina 14.

ESPERIMENTI CON NEUTRINI ATMOSFERICI I neutrini atmosferici sono prodotti dal decadimento di pioni e mesoni K, generati dai raggi cosmici che impattano sugli strati più elevati dell'atmosfera terrestre. La distanza percorsa dai neutrini va da circa 15 km, per quelli prodotti allo Zenit rispetto al rivelatore, fino a 13 000 km, per quelli provenienti dal lato opposto della Terra. Lo spettro energetico ha un massimo a circa 1 GeV e si estende per diverse centinaia di GeV. Ciò rende questi esperimenti sensibili ad un valore 10^{-4} eV² per Δm^2 . Il flusso di ν_μ e ν_e viene misurato con un rivelatore che offre un grande volume sensibile e si confrontano le osservazioni con quanto ci si aspetta sulla base di simulazioni di Monte Carlo (*MC*) molto dettagliate. In sostanza si misura il *rapporto doppio* (*double ratio*)

$$R = \frac{(N_\mu/N_e)_{\text{dati}}}{(N_\mu/N_e)_{\text{MC}}}$$

in cui N_μ ed N_e sono il numero di neutrini ν_μ e ν_e misurati (dati) ed aspettati (*MC*). I risultati danno per R un valore sensibilmente inferiore ad 1. Il che equivale ad un deficit di ν_μ .

ESPERIMENTI CON REATTORI NUCLEARI Nei reattori nucleari i neutrini sono prodotti dalla fissione di elementi pesanti quali ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu e ^{241}Pu ed hanno un'energia media di circa 3 MeV. I rivelatori sono posti ad una distanza che varia da 10 m a circa 1 km ed utilizzano la reazione $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ per identificare i neutrini. Finora, l'esperimento denominato *CHOOZ* è stato quello con una sensibilità maggiore.⁵ I suoi risultati indicano un'assenza di oscillazioni per $\Delta m^2 < 0.7 \times 10^{-3}$ eV² a $\sin^2 2\alpha = 1$ e per $\sin^2 2\alpha > 0.10$ a valori maggiori di Δm^2 [Apollonio *et al.*, 1999, 2003].

⁵ Il nome di questo esperimento deriva da quello del villaggio francese *Chooz*, nelle Ardenne, presso cui è stato installato il reattore nucleare impiegato per la produzione dei neutrini.

ESPERIMENTI CON NEUTRINI PRODOTTI DA ACCELERATORE Negli acceleratori i neutrini sono prodotti dal decadimento dei pioni, i quali sono generati da un fascio di protoni collidenti su un bersaglio. Con l'energia dei protoni che va da 1 a 10 GeV, i neutrini prodotti hanno energie tipiche di 100 MeV. Poiché la distanza tra sorgente e rivelatore è dell'ordine di qualche km, questa classe di esperimenti mostra una sensibilità, Δm^2 , di circa 0.1 eV^2 . L'esperimento condotto presso il Los Alamos Meson Physics Facility ([LAMPF](#)) con il rivelatore Liquid Scintillator Neutrino Detector ([LSND](#)) ha mostrato la comparsa di ν_e e $\bar{\nu}_e$ da un fascio puro di ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$, con un $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ a $\sin^2 2\alpha \sim 10^{-2}$ [[Athanassopoulos et al., 1998](#)]. Ma questi risultati non sembrano confermati da un altro esperimento simile, Karlsruhe Rutherford Medium Energy Neutrino experiment ([KARMEN](#)). Anche in questo si usa la tecnica dello scintillatore liquido per rivelare i neutrini e la distanza tra rivelatore e sorgente è 17 m, però non c'è evidenza di ν_e al di sopra del fondo aspettato [[Eitel et al., 1999](#)].

Un altro esperimento, che può essere annoverato sia nella classe di quelli atmosferici che in quella degli esperimenti condotti con acceleratori, è quello denominato KEK to Kamioa ([K2K](#)). In esso si produce un fascio puro di ν_μ con l'acceleratore [KEK](#). L'esperimento confronta i flussi di ν_μ misurati con un rivelatore posto nelle vicinanze della sorgente con i risultati ottenuti da un rivelatore posto lontano, ad una distanza di circa 250 km.⁶ La sensibilità raggiunta è quella tipica degli esperimenti con neutrini atmosferici e ciò in virtù dell'energia dei neutrini prodotti. Le misure indicano una diminuzione di ν_μ [[Ahn et al., 2006](#)].

Nell'ambito di questa breve sintesi non si può fare a meno di citare l'esperimento in corso di svolgimento denominato Oscillation Project with Emulsion-tRacking Apparatus ([OPERA](#)). Esso si propone di fornire la prova diretta dell'apparizione di ν_τ da un fascio puro di ν_μ . I neutrini utilizzati sono quelli prodotti dall'esperimento Cern Neutrino to Gran Sasso ([CNGS](#)) del [CERN](#) e viaggiano per circa 730 km (ad 11 km di profondità sottoterra) fino a raggiungere i Laboratori Nazionali del Gran Sasso ([LNGS](#)), dove è localizzato il rivelatore [[Guler, 2000](#)]. La grande distanza tra sorgente del fascio e rivelatore (*long base-line*) permette di esplorare la regione di sensibilità $\Delta m^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$ e $\sin^2 2\alpha \sim 1$.

1.3.2 L'esperimento SNO

L'esperimento [SNO](#) ha osservato i neutrini solari attraverso l'interazione di questi con acqua pesante (D_2O). L'esperimento era collocato circa 2 km sotto la superficie terrestre in una miniera vicino alla città di Sudbury in Ontario, nel Canada. Il rivelatore era un *rivelatore Cerenkov* in tempo reale e funzionò dal maggio 1999, fino al 28 novembre 2006. Tutti i rivelatori di neutrini solari prima di [SNO](#) erano sensibili principalmente o esclusivamente ai neutrini elettronici e non ai neutrini ν_μ o ν_τ . L'esperimento [SNO](#) fu progettato per verificare l'ipotesi delle oscillazioni di neutrino, misurando contemporaneamente il flusso di neutrini elettronici, ma anche il flusso totale dei neutrini, compresi i neutrini muonici e tauonici. A differenza dei rivelatori precedenti, l'uso dell'acqua pesante consentiva di rivelare due tipi di reazioni, una delle quali sensibile a tutti i sapori di neutrino. Il rivelatore di [SNO](#) si trova sotto 2092 m di roccia, equivalenti a 6010 m di acqua. Il bersaglio di [SNO](#) era composto da 1000 t di acqua pesante ultrapura contenuta in un contenitore sferico di 6 m di raggio, spesso 5 cm. La sfera contenente l'acqua pesante era circondata da

⁶ Il rivelatore è Super-Kamiokande.

9456 fotomoltiplicatori. L'esperimento non rivelava direttamente i neutrini, ma osservava la luce prodotta da elettroni ultrarelativistici (generati in vari processi) nell'acqua pesante per effetto Cerenkov, tramite i fotomoltiplicatori. L'esperimento [SNO](#) era sensibile a tre diverse reazioni con i neutrini, e fu studiando i rapporti tra i flussi dei neutrini rivelati con ognuna di queste reazioni che l'esperimento fu in grado di verificare l'ipotesi dell'oscillazione dei neutrini. Passiamo a descrivere brevemente le reazioni su cui si basa [SNO](#).

La prima è un'interazione di *corrente carica* in cui un neutrino elettronico converte un neutrone dell'acqua pesante in protone,

$$\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-.$$

Poiché i neutrini solari hanno energia inferiore alla massa del muone e a quella della particella τ , alla reazione possono partecipare solo i neutrini elettronici con soglia cinematica $2m_p + m_e - m_d \approx 1.4 \text{ MeV}$. L'elettrone finale (con energia intorno a 5–15 MeV) veniva rivelato tramite la luce Cerenkov emessa, mentre il protone prodotto non aveva sufficiente energia per essere osservato. Dato che l'esperimento, al fine di discriminare vari fondi, era sensibile ad un'energia di 5.5 MeV (cioè i neutrini incidenti dovevano avere un'energia di almeno 6.9 MeV per produrre una reazione osservabile), esso risultava sensibile solo ai neutrini solari del ^8B .

La seconda reazione è un'interazione di *corrente neutra*, dove il neutrino rompe il deutone in un protone e un neutrone,

$$\nu_l + d \rightarrow p + n + \nu_l, \quad l = e, \mu \dots$$

Questo è il processo più importante perché vi partecipano tutti i tipi di neutrino. Quello che viene rivelato è il neutrone attraverso una cattura neutronica. L'acqua pesante ha una grande sezione d'urto per la cattura di neutroni, e quando un neutrone è catturato da un nucleo di deuterio viene prodotto un fotone di 6.25 MeV. La direzione del fotone è completamente scorrelata con la direzione del Sole. Questo fatto può essere usato per discriminare questi fotoni da quelli prodotti per effetto Cerenkov in altri processi. I fotoni prodotti daranno origine ad elettroni per effetto Compton i quali verranno rivelati per effetto Cerenkov. La soglia dell'energia dei neutrini per questa reazione è di $m_p + m_n - m_d \approx 2.224 \text{ MeV}$, quindi anche questa interazione è sensibile solo ai neutrini solari del ^8B . Questa reazione è la più importante in quanto misura il flusso totale di neutrini del ^8B . La capacità di misurare le reazioni in corrente neutra e in corrente carica separatamente è unica di [SNO](#) e rende possibile l'interpretazione dei risultati sperimentali indipendentemente dai calcoli teorici di astrofisica, in particolare dal Modello Solare Standard [[Helmer, 2000a](#)]. Dal flusso di neutrini misurato attraverso questa reazione si può scoprire se il deficit di neutrini rivelato dagli altri esperimenti è dovuto al fatto che questi erano sensibili solo ai neutrini di tipo elettronico o se invece è dovuto al modello teorico [[Helmer, 2000b](#)].

L'ultima reazione utilizzata da [SNO](#) è la seguente

$$\nu_l + e \rightarrow \nu_l + e, \quad l = e, \mu \dots$$

Si tratta di un processo elastico che coinvolge tutti i tipi di neutrino e gli elettroni atomici. La reazione è dominata dai neutrini elettronici che possono scambiare, oltre al bosone Z anche il bosone W .⁷ Il fatto che il processo

⁷ La sezione d'urto dello scattering con ν_e è circa 6 volte maggiore di quella della diffusione con ν_μ o ν_τ

coinvolge elettroni atomici significa che esso avviene con la stessa probabilità in acqua pesante e in quella leggera. Trattandosi di una reazione elastica, non c'è soglia, l'unica soglia è quella dell'esperimento, che come accennato, è sensibile ad energie > 5.5 MeV. Anche in questo caso, dunque, si rivelano solo neutrini solari del ^8B .

I RISULTATI Il 18 giugno 2001 fu pubblicato il primo risultato di SNO [Ahmad *et al.*, 2001], primo di una serie [Ahmad *et al.*, 2002a,b], confermando il deficit di neutrini solari osservata già precedentemente. Le misura in corrente neutra del flusso totale di neutrini attivi dimostrò che circa due neutrini elettronici solari su tre cambiavano il loro sapore in muonico o tauonico durante il tragitto dal Sole fino al rivelatore. Infatti il flusso totale misurato dei neutrini di qualsiasi sapore concorda con quello calcolato teoricamente, mentre il flusso dei neutrini elettronici è circa un terzo, rispetto a quello, di tutti i neutrini. Poiché il Sole produce solo neutrini elettronici significa che i $2/3$ dei neutrini elettronici hanno cambiato sapore dal momento della loro creazione all'interno del Sole sino alla rivelazione [Ahmad *et al.*, 2001]. Questa transizione di sapore è spiegabile attraverso le oscillazioni di neutrino e implica che il neutrino abbia una massa non nulla. Questi importanti risultati sono stati confermati in modo più preciso successivamente [Ahmed *et al.*, 2004; Aharmim *et al.*, 2005]. In definitiva l'esperimento SNO ha dimostrato che il problema dei neutrini solari è dovuto alle oscillazioni di neutrino.

I risultati dell'esperimento hanno avuto un grande impatto, come evidenziato dal fatto che le sue pubblicazioni sono tra le più citate.

1.4 OLTRE IL MODELLO STANDARD

Il Modello Standard ha avuto grande successo nel descrivere la fenomenologia delle particelle elementari osservata finora. Ha dato una corretta descrizione delle masse dei bosoni vettoriali, di tutte le simmetrie osservate, incluso la violazione di CP, che è spiegata dall'introduzione di fasi complesse nella matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Il fenomeno delle oscillazioni dei neutrini dimostra pure che il Modello Standard può essere esteso facilmente ad includere la LFV, ma come vedremo (§ 1.5, pag. 21) tale violazione è estremamente piccola, praticamente non osservabile.

Nonostante i molteplici successi, Il Modello Standard presenta aspetti insoddisfacenti, principalmente di carattere teorico. Qui di seguito ne elencheremo alcuni.

- Il modello non fornisce una spiegazione dell'esistenza di diverse famiglie di particelle, né tanto meno del loro numero. La misura dell'ampiezza Γ nel decadimento della Z^0 impone che il numero massimo delle generazioni sia 3, ma non ne dà una giustificazione teorica.
- L'introduzione del meccanismo di Higgs permette di introdurre la generazione delle masse, ma non ne predice il valore che, in ultima analisi, rimane un fatto sperimentale. Non si capisce neppure perché le masse dei fermioni, ad esempio, variano in un intervallo di quasi cinque ordini di grandezza.
- Matematicamente, il modello si presenta come il prodotto diretto di tre sottogruppi indipendenti, ognuno con la propria costante di accoppiamento. Ma solo nel settore elettrodebole la *parità* non è conservata.

Quelli citati sono solo alcuni dei motivi che hanno spinto a ricercare modelli più generali che includessero il Modello Standard come caso limite a bassa energia. Tra questi hanno un ruolo preminente i *Modelli di Supersimmetria*, [SUSY](#), e le *Teorie di Grande Unificazione*, Grand Unified Theories ([GUT](#)).

1.4.1 I Modelli di Supersimmetria

La supersimmetria [[Coleman e Mandula, 1967](#); [Haag et al., 1975](#); [Weinberg, 2000](#)] consiste in una generalizzazione delle simmetrie spazio-temporali della Teoria Quantistica dei Campi in modo che sia possibile trasformare fermioni in bosoni e viceversa. Essa rappresenta anche un quadro teorico in cui è possibile unificare la fisica delle particelle con la gravità. La scala energetica dell'unificazione è determinata dalla *massa di Planck*, $M_P \approx 10^{19}$ GeV.⁸ A questo riguardo, se il Modello Standard rappresenta il limite di bassa energia di una teoria più completa, valida alla scala di Planck, allora, per poter cancellare i contributi divergenti delle correzioni radiative alla massa del bosone di Higgs, è necessario un aggiustamento accurato (*fine tuning*) della *massa nuda* di Higgs, in modo da mantenere la scala elettrodebole, 246 GeV,⁹ ben al di sotto dell'energia di unificazione. Con la supersimmetria si ha una soluzione naturale di questo problema: i loop fermionici divergenti sono cancellati *esattamente* da quelli bosonici e viceversa!

Nell'estensione minimale, supersimmetrica, del Modello Standard, Minimal Super-Symmetric Standard Model ([MSSM](#)), ad ogni particella ordinaria viene associato un partner supersimmetrico, differente in spin di $\hbar/2$. Così, accanto ai quark ed ai leptoni ordinari, nella [SUSY](#) abbiamo gli *squark* (\tilde{q}) e gli *sleptoni* (\tilde{l}), che sono particelle descritte da campi scalari complessi, sono cioè *bosoni*. I *gaugini* ($\tilde{\lambda}$), invece, sono il complesso di fermioni supersimmetrici corrispondenti a bosoni di gauge: i *gluini* (\tilde{G}) sono associati ai gluoni, mentre le particelle *wino* (\tilde{W}) e *bino* (\tilde{B}) sono i partner dei campi di gauge di SU(2). Il superpartner del campo di Higgs è una particella chiamata *higgsino* (\tilde{H}): con la rottura spontanea di simmetria, si mescola con i wino e i bino per dare origine a due fermioni di Dirac, i *chargini*, e quattro fermioni di Majorana,¹⁰ i *neutralini* (tab. 1.4). La rottura spontanea di simmetria si verifica perché [SUSY](#) non può essere una simmetria esatta: se così fosse, le particelle ordinarie e i loro partner supersimmetrici sarebbero degeneri in massa e quindi si dovrebbero osservare, ad esempio, particelle con la stessa massa dell'elettrone ma di natura bosonica! Nella [SUSY](#) non è più sufficiente l'introduzione di un singolo doppietto di Higgs ma ne occorrono almeno due: ciò è necessario per poter generare, separatamente, le masse nel settore dei quark *u* ed in quello che comprende sia i quark *d* che i leptoni carichi.

In questi brevi cenni, non è nostra intenzione sviluppare tutte le problematiche a cui i modelli supersimmetrici danno origine,¹¹ ciò che qui ci interessa mettere in evidenza è come, in essi, emerga la [LFV](#).

⁸ La *massa di Planck* caratterizza la scala di energia a cui gli effetti gravitazionali quantistici diventano significativi. Essa è definita come la massa (M_P) di una particella la cui energia gravitazionale ($G_N M_P^2 / \lambda_C$), su una distanza pari alla propria lunghezza d'onda Compton ($\lambda_C = \hbar / M_P c$), è uguale alla sua energia totale a riposo ($M_P c^2$). A quest'energia le interazioni gravitazionali tra particelle elementari sono confrontabili, in intensità, con le interazioni di gauge.

⁹ Questo numero altri non è che il valore aspettato nel vuoto dello scalare di Higgs, $v = (G\sqrt{2})^{-1/2}$, dove $G = 1.166 \times 10^{-5}$ GeV⁻² è la *costante di Fermi*.

¹⁰ I fermioni di Majorana sono particelle neutre (le particelle *realmente neutre*, secondo Landau [[Landau e Lifshitz, 1978b](#)]) per le quali la particella coincide con la propria antiparticella.

¹¹ Per una rassegna dei modelli supersimmetrici si può consultare [[Nilles, 1984](#); [Haber e Kane, 1985](#)].

Tabella 1.4: Le particelle nel [MSSM](#)

PARTICELLE ORDINARIE		PARTICELLE IN SUSY	
Particella	Spin	Particella	Spin
quark (q)	1/2	squark (\tilde{q})	0
leptone (l)	1/2	sleptone (\tilde{l})	0
gluone (G)	1	gluino (\tilde{G})	1/2
W^\pm, Z^0, γ	1	chargino ($\tilde{\chi}_i^\pm, i = 1, 2$)	1/2
bosone di Higgs (H)	0	neutralino ($\tilde{\chi}_i^0, i = 1, \dots, 4$)	1/2

Se si scrive la lagrangiana del [MSSM](#), questa può essere così riassunta

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{inv}} + \mathcal{L}^W + \mathcal{L}^{\text{break}}.$$

Il termine \mathcal{L}^{inv} è quello che descrive il fatto che le interazioni bosoniche e fermioniche sono legate le une alle altre dall'invarianza per supersimmetria. Ciò si manifesta con la presenza delle costanti di accoppiamento, non solo nella derivata covariante (che, come si è visto, determina l'interazione tra bosoni e fermioni nel Modello Standard), ma anche nelle interazioni di tipo gaugino-scalare-fermione ($\sim \tilde{\lambda}\phi f$) e in quelle di autoaccoppiamento scalare ($\sim \phi\phi$).

\mathcal{L}^W , invece, introduce le interazioni di tipo Yukawa. Tale termine della lagrangiana è determinato da una funzione scalare, $W(\phi)$, detta *superpotenziale* e descrive un insieme di interazioni tra fermioni e scalari. Il superpotenziale $W(\phi)$ è una funzione dei *supermultipletti*; un supermultipletto (ψ, ϕ) è un operatore di campo costituito dai campi di una particella ordinaria (ψ) e da quello del corrispondente partner supersimmetrico (ϕ). Nel caso del [MSSM](#), la funzione W è data da

$$W = (y_e)_{ij} H_1 E_i L_j + (y_d)_{ij} H_1 D_i Q_j + (y_u)_{ij} H_2 U_i Q_j - \mu H_1 H_2$$

in cui E e L_i sono supermultipletti di $SU(2)_L$ corrispondenti ai singoletti e doppietti leptonici. In modo analogo, Q , U e D sono, rispettivamente, i supermultipletti per i doppietti dei quark e per i singoletti dei quark di tipo *up* e *down*. H_1 e H_2 sono i campi relativi ai due doppietti distinti di Higgs. Le matrici $(y_k)_{ij}$, $k = e, d, u$ sono le *matrici di accoppiamento di Yukawa*; μ è spesso chiamato *parametro di massa* del bosone di Higgs poiché da origine ad un termine di massa per questa particella.

Sviluppando il superpotenziale si possono dedurre diversi tipi di interazioni di Yukawa, la generazione del termine di massa dell'higgsino e le autointerazioni scalari quadratiche (ϕ^2), cubiche (ϕ^3) e quartiche (ϕ^4).

In questo schema, le masse delle superparticelle (squark, sleptoni e gaugini) sono generate dall'ultima parte della lagrangiana, $\mathcal{L}^{\text{break}}$, che *rompe* la supersimmetria e causa il miscelamento (*mixing*) del *sapore* delle particelle. Per esempio, nel settore sleptonico, si ottengono i seguenti termini di massa

$$\mathcal{L}^{\text{slept}} = -(m_E^2)_{ij} \tilde{e}_{iR}^* \tilde{e}_{jR} - (m_L^2)_{ij} \tilde{l}_{iL}^* \tilde{l}_{jL}$$

dove m_E^2 e m_L^2 sono le matrici di massa degli sleptoni, right-handed (\tilde{e}_R) e left-handed (\tilde{l}_L). Ebbene, esprimendo tutto nella base in cui le matrici di massa dei *leptoni* sono diagonali, può succedere che le matrici di massa degli sleptoni presentino degli elementi non diagonali differenti da zero. Se, ad

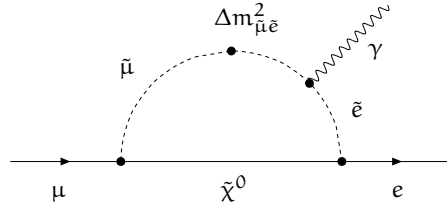


Figura 1.3: Grafico di Feynman per il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ nel [MSSM](#)

esempio, l'elemento $\tilde{\mu} - \tilde{e}$, $\Delta m_{\tilde{\mu}\tilde{e}}^2$, è non nullo, il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ può avvenire secondo il processo descritto dal grafico di Feynman riportato nella figura 1.3.

In generale, i modelli supersimmetrici hanno la conseguenza di introdurre diverse nuove particelle i cui parametri (solo nel [MSSM](#), tra masse, fasi ed angoli di miscelamento, se ne contano 105 [[Dimopoulos e Sutter, 1995](#)]) non possono essere eliminati con opportuni cambiamenti di base. Questo permette di individuare nuovi canali attraverso i quali le nuove superparticelle possono essere scambiate come stati virtuali e dare così origine alla [LFV](#).

1.4.2 Le Teorie di Grande Unificazione

Come abbiamo visto (§ 1.2, pag. 5), nel Modello Standard i quark ed i leptoni giocano un ruolo fondamentale, sullo stesso piano: entrambi i gruppi di particelle sono fermioni privi di struttura interna.

Partendo da questa osservazione, è possibile, per così dire, estendere la [QCD](#) in modo da includere i leptoni come *quarto colore*. Seguendo questa via, si possono costruire modelli delle interazioni fondamentali basati su un gruppo più generale di quello che governa il Modello Standard:¹² si dice che le interazioni forti ed elettrodeboli sono unificate da un'unica costante di accoppiamento, α_G , definita ad un'energia di unificazione M_G . Il gruppo più semplice che permette di realizzare questa sintesi è il gruppo di gauge $SU(5)$, e il modello che ne deriva si chiama *modello di Georgi-Glashow*, formulato nella prima metà degli anni '70 [[Georgi e Glashow, 1974](#)].

Come sempre ci limiteremo ad un breve cenno, con particolare riguardo agli sviluppi collegati alla [LFV](#).¹³

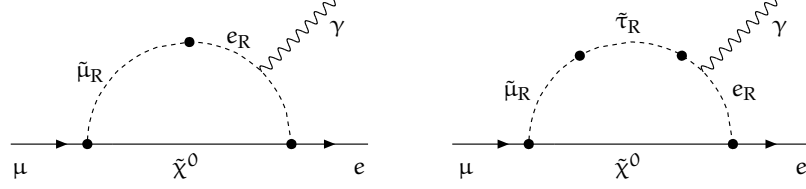
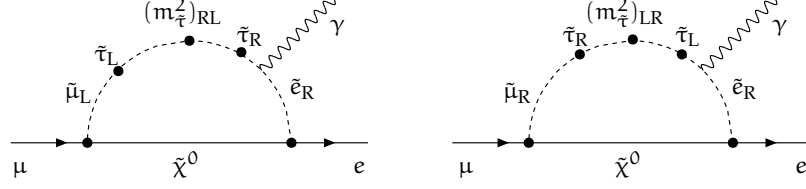
La prima cosa da dire è che se questi modelli si riducessero al solo Modello Standard nel limite di bassa energia, i processi [LFV](#) avrebbero dei *rate* così bassi da non essere osservabili. Quindi è inevitabile ammettere che ci siano dei contributi anche da parte di particelle [SUSY](#) (modelli [SUSY GUT](#) [[Sakai, 1981](#); [Dimopoulos e Georgi, 1981](#)]).

Negli ultimi anni, hanno avuto molta attenzione i modelli [SUSY GUT](#) basati sui gruppi $SU(5)$ e $SO(10)$. Infatti le loro previsioni sulle tre costanti di accoppiamento (α , g , e g_s) sono consistenti con le misure effettuate presso il Large Electron-Positron Collider ([LEP](#)) e lo Stanford Linear Collider ([SLC](#)): le costanti risultano unificate ad un'energia $M_G \approx 2 \times 10^{16}$ GeV [[Amaldi et al., 1991](#); [Ellis et al., 1991](#); [Langacker e Luo, 1991](#)].

Abbiamo già accennato al fatto che nelle [GUT](#) i leptoni non sono considerati come una famiglia di particelle distinta da quella dei quark. Ciò si traduce, matematicamente, definendo degli operatori di campo spinoriali, T e F ,

¹² Il gruppo non è più il prodotto diretto di altri sottogruppi come avviene nel Modello Standard (§ 1.2.3, pag. 8).

¹³ Per un ulteriore approfondimento si può consultare [[Amsler et al., 2008](#), p. 180] e la bibliografia ivi citata.

Figura 1.4: Il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ in SU(5) SUSY GUTFigura 1.5: Il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ in SO(10) SUSY GUT

costituiti sia dai campi dei quark, q , sia da quelli dei leptoni, l . In SUSY GUT si completano questi operatori aggiungendovi i campi delle superparticelle corrispondenti.

Ad esempio, in SU(5) si può scrivere il superpotenziale come

$$W = \frac{1}{8} (y_u)_{ij} T_i T_j H(5) + (y_d)_{ij} \bar{F}_i T_j \bar{H}(5),$$

dove T e \bar{F} sono i campi fermionici corrispondenti, rispettivamente, alle rappresentazioni 10 e $\bar{5}$ del gruppo, mentre $H(5)$ e $\bar{H}(5)$ sono i due campi di Higgs delle rappresentazioni 5 e $\bar{5}$; y_u è la matrice di accoppiamento di Yukawa per i quark di tipo u , y_d quella per i quark d e i leptoni. Esplicitando i vari campi T , F e H ,¹⁴ si ottengono le diverse interazioni di Yukawa che generano le masse dei quark e dei leptoni. Anche in questo caso, come visto in precedenza (§ 1.4.1 a pag. 17), si può dimostrare che, nella base in cui le costanti di Yukawa dei leptoni sono diagonali, le matrici di massa degli *sleptoni* presentano dei termini non diagonali. Questo permette il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ con dei diagrammi come quelli indicati dalla figura 1.4.

In SO(10) invece, il superpotenziale diventa

$$W = \frac{1}{2} (y_u)_{ij} \Psi_i \cdot \Phi_u \cdot \Psi_j + \frac{1}{2} (y_d)_{ij} \Psi_i \cdot \Phi_d \cdot \Psi_j,$$

dove Ψ_i indica il multipletto della rappresentazione 16 del gruppo, mentre Φ_u e Φ_d sono i due campi di Higgs di dimensione 10 . In questo caso il decadimento del muone è descritto dai grafici della figura 1.5.

1.4.3 Modelli supersimmetrici con neutrini di Majorana

Al § 1.2.3 a pag. 8 abbiamo visto come, nel Modello Standard, la possibilità che i neutrini abbiano una piccola massa genera il fenomeno delle oscillazioni e quindi la LFV.

In realtà, esiste anche un altro modo attraverso il quale i neutrini acquistano massa: il *meccanismo see-saw* [Gell-Mann *et al.*, 1979; Yanagida, 1979]. Esso

¹⁴ Per i campi H ciò significa tener conto della rottura di simmetria.

consiste nell'aggiungere alla teoria un termine di massa di Majorana, M_R , per il neutrino destrorso (R, right-handed).¹⁵ Così, la lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L}_\nu = (\bar{\nu}_L^c \quad \bar{\nu}_R) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix},$$

in cui m_D è il termine di massa di Dirac e ν^c è il coniugato di carica del neutrino.¹⁶ Assumendo la massa di Majorana molto più grande di quella di Dirac, le masse fisiche del neutrino diventano

$$m_1 \approx M_R, \quad m_2 \approx \frac{m_D^2}{M_R},$$

da cui si deduce che un neutrino rimane *pesante* mentre l'altro assume una piccola massa. Se, ad esempio, M_R è 10^{15} GeV e la massa di Dirac è 100 GeV, la massa del neutrino diventa dell'ordine di 10^{-2} eV.

Volendo includere questo meccanismo nei modelli supersimmetrici [Borzumati e Masiero, 1986], il superpotenziale nel settore leptonico è dato da

$$W_N = (y_e)_{ij} H_1 E_i^c L_j + (y_\nu)_{ij} H_2 N_i L_j + \frac{1}{2} (M_R)_{ij} N_i N_j,$$

con N_i supermultipletti del neutrino destrorso e M_R la matrice di massa di Majorana. y_ν è una nuova matrice di costanti di accoppiamento. Ancora una volta, poiché ci sono due matrici, y_e e y_ν , in generale non sarà possibile diagonalizzarle simultaneamente e ciò rende possibile il miscelamento dei sapore leptonici, cioè la LFV.

1.5 LE PREVISIONI SUL DECADIMENTO $\mu \rightarrow e\gamma$

Risulta evidente che la scoperta di processi LFV darebbe delle importanti indicazioni su una nuova Fisica oltre il Modello Standard.

Tra i processi più interessanti che potrebbero rivelare la LFV, ci sono quelli che coinvolgono i muoni, e ciò per la relativa facilità con cui è possibile produrre fasci di muoni di elevata intensità.¹⁷ In particolare, il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ è quello che per chiarezza ed eleganza ha attratto maggior attenzione.

Qui vogliamo accennare brevemente alle previsioni che i modelli teorici visti nelle pagine precedenti fanno su tale decadimento, non prima, però, di aver accennato alla possibilità che esso si manifesti nel Modello Standard stesso, se si assume una massa non nulla per i neutrini [Bilenky et al., 1977; Petcov, 1977]. In fatti, in questo caso, in virtù delle correzioni radiative, ci possono essere deboli effetti di LFV e il muone potrebbe decadere come descritto dai diagrammi della figura 1.6.

Una stima della larghezza di decadimento $\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)$ può essere fatta sfruttando i risultati sperimentali sulle oscillazioni dei neutrini (§ 1.3.1, pag. 12). Infatti, constatando che la transizione $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ si manifesta su una distanza $L \sim 1/m_W$, che l'energia fluente nei loop è dell'ordine di m_W e che,

¹⁵ Per le particelle di Majorana si ricordi la nota 10 a pag. 17.

¹⁶ Il campo coniugato di carica è definito come $\bar{\Psi}^c = -\Psi^T C^{-1}$, in cui la matrice di coniugazione di carica, C , soddisfa la relazione $C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$, essendo γ^μ , le matrici di Dirac (nota 1, pag. 6).

¹⁷ Tanto che alcuni laboratori vengono chiamati *muon-factories*, cioè *fabbriche di muoni*.

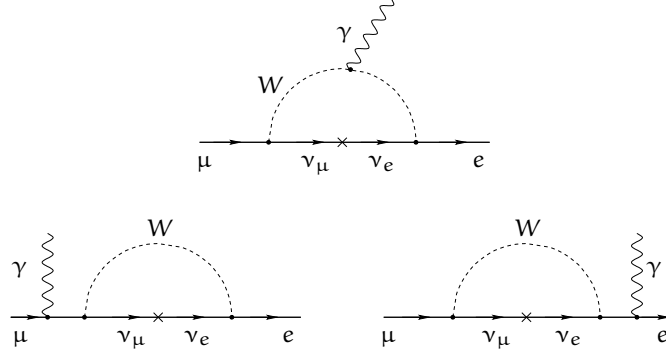


Figura 1.6: Il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ nel Modello Standard

per il resto, i diagrammi sono simili a quelli del decadimento normale del muone, $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$, il cosiddetto decadimento di *Michel*, possiamo scrivere

$$\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma) \approx \Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})\Gamma_\gamma\Gamma_{\text{osc}}$$

dove

$$\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}) = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

è il contributo dovuto dal decadimento di Michel; G è la costante di Fermi e m_μ la massa del muone.

Il secondo fattore,

$$\Gamma_\gamma \approx \frac{\alpha}{2\pi},$$

rappresenta il contributo del vertice γ , essendo α la costante di struttura fine. Invece

$$\Gamma_{\text{osc}} \approx \sin^2 2\alpha \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4m_W^2} \right)$$

è il contributo dell'oscillazione dei neutrini; qui α è il relativo angolo di miscelamento, mentre Δm^2 ne è la differenza tra i quadrati delle masse.

Un rapido conto, assumendo $\sin^2 2\alpha \sim 1$, $\Delta m^2 \sim 10^{-5} \text{ eV}^2$ e $m_W \sim 80 \text{ GeV}$, porta al risultato per il branching ratio

$$B(\mu \rightarrow e\gamma) \equiv \frac{\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)}{\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})} \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{\Delta m^2}{4m_W^2} \right)^2 \sim 10^{-58}.$$

Questo valore differisce di un fattore $3/4$ da quello che si sarebbe ottenuto con un calcolo esatto dei grafici della figura 1.6.

1.5.1 Le previsioni di $SU(5)$ SUSY GUT

Nei modelli teorici discussi precedentemente è possibile eseguire calcoli dettagliati sul branching ratio del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$. I risultati, naturalmente, dipendono dai molteplici parametri della teoria.

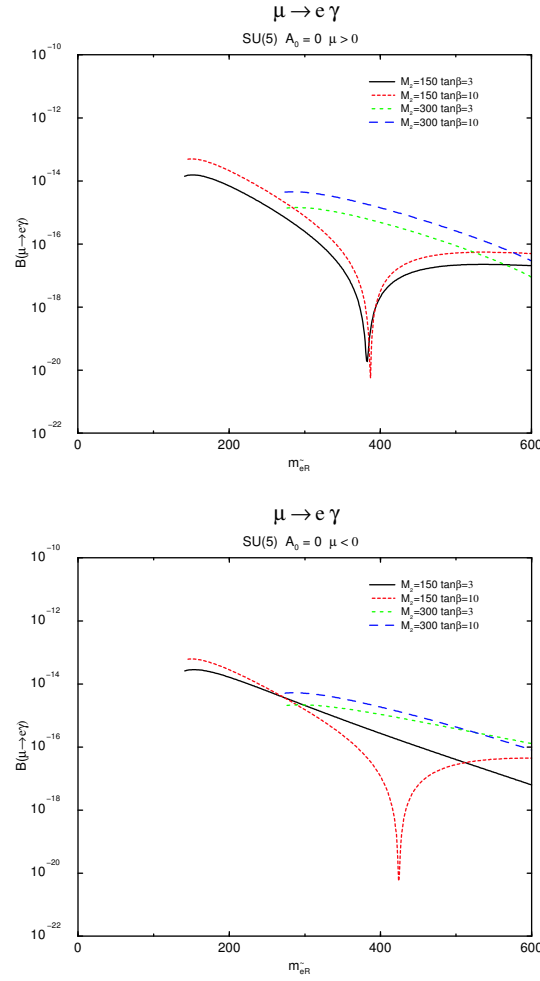


Figura 1.7: $B(\mu \rightarrow e\gamma)$ in SU(5) SUSY GUT

Per esempio, nel caso dei diagrammi della figura 1.4 e nel limite di massa del gaugino nulla, il risultato può essere sintetizzato come segue

$$B(\mu \rightarrow e\gamma) = 2.4 \times 10^{-12} \left(\frac{|V_{ts}|}{0.04} \frac{|V_{td}|}{0.01} \right)^2 \left(\frac{100 \text{ GeV}}{m_{\tilde{\mu}}} \right)^4$$

dove V_{ts} , V_{td} sono alcuni elementi della matrice di CKM, $m_{\tilde{\mu}} = m_{\tilde{e}}$ è la massa dell'sleptone right-handed [Barbieri e Hall, 1994].

Un compendio delle previsioni sul branching ratio del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$, nell'ambito del modello SU(5) SUSY GUT, è mostrato nella figura 1.7.¹⁸

Come si vede, per valori della massa dell'sleptone di alcune centinaia di GeV, il branching ratio è dell'ordine di 10^{-14} , che è prossimo ai valori sperimentali attuali [Brooks *et al.*, 1999] ed è quanto si prefigge di raggiungere l'esperimento MEG [Mori *et al.*, 1999].

La figura mostra il branching ratio in funzione della massa dell'sleptone per vari valori della massa del gaugino, M_2 , e $\tan \beta = v_1/v_2$, il rapporto tra i valore nel vuoto dei due campi di Higgs.¹⁹ Il parametro μ è il cosiddetto parametro di massa dell'Higgs già citato al § 1.4.1, pag. 17.

¹⁸ Per ulteriori approfondimenti [Barbieri *et al.*, 1995; Hisano *et al.*, 1997a,b].

¹⁹ Il parametro v è stato introdotto al § 1.2.2, pag. 6 e al § 1.2.3, pag. 8.

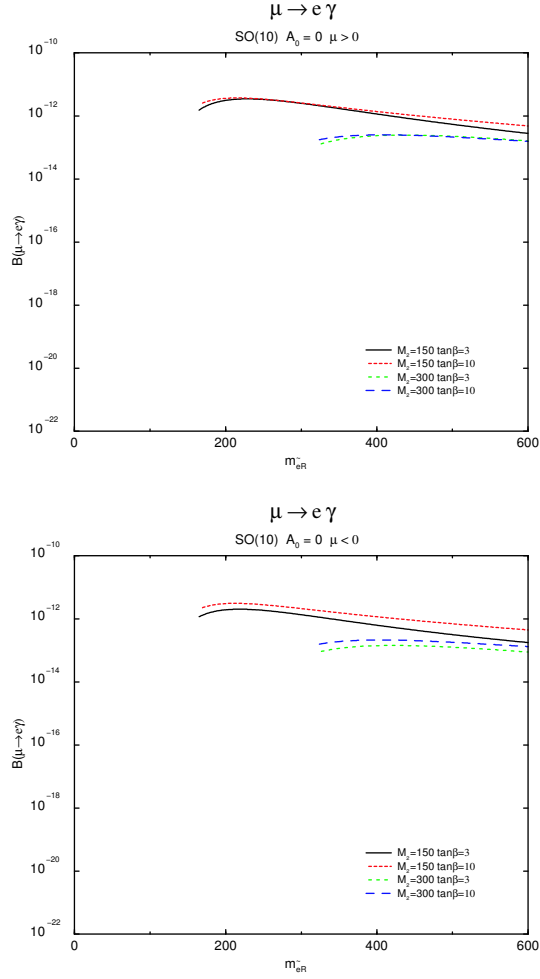


Figura 1.8: $B(\mu \rightarrow e\gamma)$ in SO(10) SUSY GUT

Dalla figura si nota, inoltre, che la LFV si manifesta solo nel settore destrorso dell'sleptone, ciò a causa del fatto che gli effetti della rinormalizzazione contribuiscono solo al settore right-handed (\tilde{e}_R) e non a quello sinistrorso (\tilde{e}_L). Da ciò segue che, nel decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$, il positrone ha elicità negativa e potrebbe essere distinto se la distribuzione angolare degli eventi $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ fosse misurata utilizzando muoni polarizzati.

1.5.2 Le previsioni di SO(10) SUSY GUT

In questo modello gli effetti della LFV sono più marcati poiché si manifestano sia nel settore right-handed che quello left-handed degli sleptoni.

Per quanto riguarda l'ampiezza del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$, il contributo dominante è determinato dai grafici mostrati nella figura 1.5. Essi risultano proporzionali a m_τ , per cui, rispetto al modello visto prima, il branching ratio subisce un miglioramento di un fattore $(m_\tau/m_\mu)^2$ [Barbieri *et al.*, 1995]. In virtù di questo incremento, il branching ratio dei processi LFV che coinvolgono i muoni può diventare confrontabile con gli attuali limiti sperimentali (10^{-11}). Queste previsioni sono riportate nella figura 1.8.²⁰

²⁰ Nella quale si utilizzano gli stessi parametri d'ingresso, M_2 e $\tan \beta$, della figura 1.7.

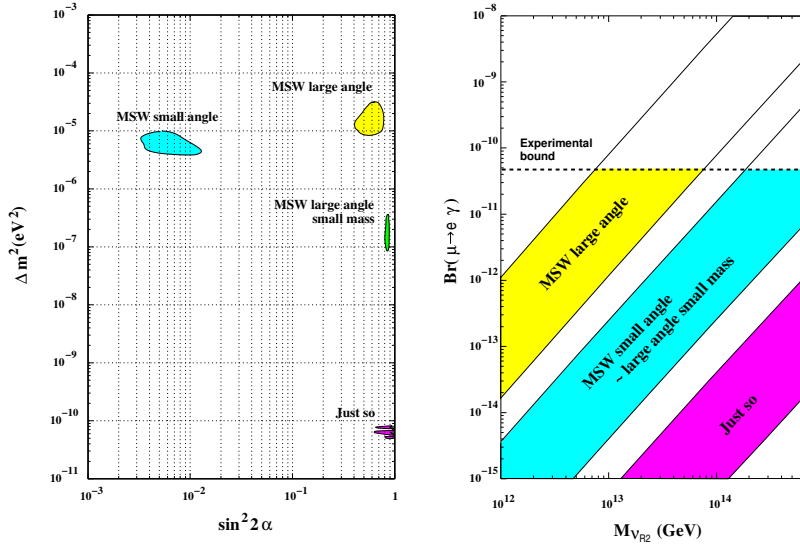


Figura 1.9: $B(\mu \rightarrow e\gamma)$ in *MSSM* con neutrino right-handed

1.5.3 Le previsioni del *MSSM* con neutrini destrorgiri

Nelle pagine precedenti (§ 1.4.3 a pag. 20) abbiamo visto come l'aggiunta di un neutrino di Majorana right-handed possa generare effetti di *LFV*. Anche in questo caso si possono eseguire calcoli dettagliati sul branching ratio di diversi processi *LFV* [Hisano *et al.*, 1995, 1996, 1998; Hisano e Nomura, 1999].

La parte sinistra della figura 1.9 mostra che i dati sul miscelamento dei neutrini solari sono confinati in alcune regioni dei valori permessi, le soluzioni di Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (*MSW*) a piccolo e grande angolo [Wolfenstein, 1978; Mikheyev e Smirnov, 1985]. Nella parte destra della figura 1.9, si riporta, invece, la corrispondente previsione per il branching ratio del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ in funzione della massa del neutrino right-handed. Risulta evidente che, combinando il branching ratio con le misure di Δm^2 e dell'angolo di miscelamento $\sin^2 2\alpha$ degli esperimenti dei neutrini solari [Davis *et al.*, 1968; Hirata *et al.*, 1989, 1990], si può discriminare, o fortemente limitare, la massa del neutrino destrorso il quale è postulato esistere ad energie estremamente elevate, $10^{12} \sim 10^{15}$ GeV.

1.5.4 Qualche considerazione finale

Da quanto visto finora, emerge chiaramente che ci sono molteplici modelli teorici che aspirano a sostituire od estendere il Modello Standard, ognuno dei quali prevede un branching ratio dell'ordine di 10^{-14} per il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$. Si intuisce, quindi, come abbassare il limite attuale (1.2×10^{-11}) in direzione di tale valore, comporti la possibilità effettiva di scoprire una nuova Fisica che superi il Modello Standard.

Parte II

L'ESPERIMENTO

Facesti come quei che va di notte,
che porta il lume dietro e sé non giova,
ma dopo sé fa le persone dotte.

DANTE, *Purgatorio*, XXII 67-69

L'utilizzo dei muoni è uno dei sistemi migliori per la ricerca della *LFV*. Questo ci è testimoniato dalla tabella 2.1, in cui sono riportati i limiti sperimentali di vari processi che violano la conservazione del numero leptonico. Come si vede, la sensibilità maggiore si raggiunge con i muoni, principalmente perché questi possono essere prodotti in grande quantità (10^{14} – 10^{15} all'anno) negli esperimenti attuali.

I principali canali in cui si manifesta la *LFV* sono, oltre al già citato decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$, il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$, la $\mu - e$ *conversion* e la conversione *muonio-antimuonio*.

Noi ci occuperemo principalmente del primo processo, $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$, accennando, a grandi linee, agli altri.

2.1 SEGNATURA E FONDI PER IL DECADIMENTO $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$

Questo decadimento è senza dubbio il più popolare dei processi *LFV*. Esso è caratterizzato da una *firma* o *segnatura* dell'evento ben marcata. Nel sistema di quiete del muone, il positrone e il fotone sono emessi in coincidenza temporale, in direzioni opposte, *back to back*, e ciascuno con un'energia che è esattamente metà della massa del muone, cioè 52.8 MeV.¹

Gli esperimenti che intendono sfruttare appieno la cinematica descritta utilizzano muoni positivi. Infatti, non è possibile utilizzare quelli negativi perché questi, quando sono fermati nel bersaglio, sono catturati dagli atomi del materiale e danno origine ad un atomo muonico (μ -*mesico*).

La ricerca degli eventi di $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ è ostacolata da due sorgenti principali di *rumore* (i cosiddetti *fondi* o eventi di *background*). Una è di origine *fisica* ed è costituita da decadimenti radiativi del muone, $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma$, in cui il positrone ed il γ sono emessi *back to back*, con i due neutrini che sottraggono una minima quantità di energia. L'altra è di natura *accidentale* ed è rappresentata dall'osservazione di un positrone proveniente da un decadimento di Michel, in associazione con un fotone di alta energia. Il fotone potrebbe provenire, ad esempio, da un decadimento radiativo del muone, dall'annichilazione in volo di un e^+ con un elettrone, oppure da un processo di *bremsstrahlung* subito dal positrone di un decadimento normale del muone.

2.2 IL FONDO *fisico*

Il decadimento radiativo del muone, $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma$, rappresenta una delle principali limitazioni alla ricerca del $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$.

¹ In realtà l'energia è $E = (m_\mu/2)[1 \pm (m_e/m_\mu)^2] \approx m_\mu/2$, in quanto $(m_e/m_\mu)^2 \approx 2.5 \times 10^{-5} \ll 1$.

Tabella 2.1: Limiti sul branching ratio di alcuni processi LFV

Processo	Limite attuale	Referenze
$\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$	$< 1.2 \times 10^{-11}$	Brooks <i>et al.</i> [1999]
$\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$	$< 1.0 \times 10^{-12}$	Bellgardt <i>et al.</i> [1988]
$\mu^- \text{Ti} \rightarrow e^- \text{Ti}$	$< 6.1 \times 10^{-13}$	Wintz [1998]
$\mu^+ e^- \rightarrow \mu^- e^+$	$< 8.3 \times 10^{-11}$	Willmann <i>et al.</i> [1999]
$\tau \rightarrow e \gamma$	$< 2.7 \times 10^{-6}$	Edwards <i>et al.</i> [1997]
$\tau \rightarrow \mu \gamma$	$< 3.0 \times 10^{-6}$	Edwards <i>et al.</i> [1997]
$\tau \rightarrow \mu \mu \mu$	$< 1.9 \times 10^{-6}$	Bliss <i>et al.</i> [1998]
$\tau \rightarrow e e e$	$< 2.9 \times 10^{-6}$	Bliss <i>et al.</i> [1998]
$\pi^0 \rightarrow \mu e$	$< 8.6 \times 10^{-9}$	Krolak <i>et al.</i> [1994]
$K_L^0 \rightarrow \mu e$	$< 4.7 \times 10^{-12}$	Ambrose <i>et al.</i> [1998]
$K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ e^-$	$< 2.1 \times 10^{-10}$	Lee <i>et al.</i> [1990]
$K_L^0 \rightarrow \pi^0 \mu^+ e^-$	$< 3.1 \times 10^{-9}$	Arisaka <i>et al.</i> [1998]
$Z^0 \rightarrow \mu e$	$< 1.7 \times 10^{-6}$	Akers <i>et al.</i> [1995]
$Z^0 \rightarrow \tau e$	$< 9.8 \times 10^{-6}$	Akers <i>et al.</i> [1995]
$Z^0 \rightarrow \tau \mu$	$< 1.2 \times 10^{-5}$	Abreu <i>et al.</i> [1997]

Quando il fotone viene emesso con un'energia $E_\gamma > 10 \text{ MeV}$, il branching ratio vale 1.4 %, come riportato dal Particle Data Group (PDG) [Amsler *et al.*, 2008]. Se immaginiamo che la coppia di neutrini venga emessa con una piccola quantità di energia e quindi con una quantità di moto altrettanto piccola, allora il positrone ed il γ , oltre ad avere un'energia prossima alla metà della massa del muone, $E_e \simeq E_\gamma \approx m_\mu/2$, viaggiano in direzioni opposte. Un tale evento può essere facilmente confuso con un decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ se l'apparato di misura non ha sufficiente risoluzione per discriminare i due casi.²

Il problema fondamentale è quello di stabilire, quale deve essere la *risoluzione* del rivelatore affinché il branching ratio per gli eventi di decadimento radiativo (nelle condizioni cinematiche citate prima) sia inferiore a quello delle previsioni già discusse per il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ (§ 1.5, pag. 21).

Per comprendere questo problema dobbiamo analizzare la larghezza di decadimento per il processo radiativo del muone. Di tale grandezza si può eseguire il calcolo esatto. Al fine di non appesantire il discorso ci limitiamo a riportare i risultati finali rimandando agli articoli in letteratura per tutti i dettagli [Eckstein e Pratt, 1959; Fronsdal e Überall, 1959].

Per prima cosa introduciamo le *energie normalizzate* del positrone e del fotone

$$x = \frac{2E_e}{m_\mu}, \quad y = \frac{2E_\gamma}{m_\mu}.$$

Poiché il caso che ci interessa è quello in cui $x \approx 1$ e $y \approx 1$, cioè le energie in gioco sono $\sim 50 \text{ MeV}$, in quanto segue si può trascurare il rapporto m_e/m_μ (nota 1, pag. 29), che tratteremo come rigorosamente nullo. Questo comporta che le energie normalizzate spaziano nel range $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Se, dunque, consideriamo il caso $x \approx 1$ e $y \approx 1$, l'angolo $\theta_{e\gamma}$ tra positrone e gamma è approssimativamente 180° , cioè la grandezza $z = \pi - \theta_{e\gamma}$ è quasi nulla, $z \approx 0$.

² Nel $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ l'angolo tra positrone e fotone è *rigorosamente* 180° , mentre nel decadimento radiativo *non* avrà *mai esattamente* questo valore (il tutto riferito, ovviamente, al sistema di quiete del muone.)

Tenuto conto di queste approssimazioni, la larghezza differenziale per il decadimento radiativo si può scrivere come segue³

$$d\Gamma = \frac{\alpha}{16\pi} \Gamma_{\text{tot}} [F_1 (1 - P_\mu \cos \theta_e) + F_2 (1 + P_\mu \cos \theta_e)] d\tau d(\cos \theta_e),$$

dove α è la costante di struttura fine, Γ_{tot} rappresenta la larghezza totale del decadimento del muone, θ_e indica l'angolo tra lo spin del muone e l'impulso del positrone, P_μ è la polarizzazione del muone. Il primo termine corrisponde ai positroni emessi, principalmente, in direzione opposta a quella dello spin del muone, l'altro termine è relativo ai positroni emessi concordemente a tale direzione. Per brevità abbiamo posto $d\tau \equiv dx dy dz$.

Tenendo conto dei termini fino al secondo ordine in $1 - x$, $1 - y$ e z , le funzioni F_1 e F_2 sono date da

$$F_1 = 4z(1 - x)^2, \quad F_2 = 4z \left[4(1 - x)(1 - y) - \frac{1}{2}z^2 \right].$$

Si può verificare facilmente che l'espressione scritta per $d\Gamma$ si annulla quando $x = y \equiv 1$, esattamente. Ciò, del resto, non stupisce, perché in tal caso i neutrini avrebbero energia ed impulso rigorosamente nulli e il decadimento non sarebbe radiativo ma un $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$, che, come abbiamo visto, nel Modello Standard con $m_\nu = 0$ è vietato.

Comunque nella realtà, l'apparato di misura ha una risoluzione finita che introduce degli eventi di background i quali, in ultima analisi, limitano la sensibilità della ricerca del $\mu \rightarrow e \gamma$.

Se indichiamo con δx , δy e δz la risoluzione del rivelatore,⁴ relativamente alle rispettive grandezze, possiamo valutare l'impatto che il decadimento radiativo ha su tale sensibilità. Infatti, per quanto riguarda le energie (x , y) la regione del segnale del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ è

$$1 - \delta x \leq x \leq 1, \\ 1 - \delta y \leq y \leq 1.$$

Per quanto riguarda z , invece, in linea di principio essa è

$$0 \leq z \leq \delta z.$$

In realtà, però, non dobbiamo dimenticare che z , a meno di π , è l'angolo $\theta_{e\gamma}$ e che la cinematica del decadimento a 4 corpi non permette all'angolo tra e^+ e γ di assumere qualunque valore. In particolare, nelle nostre approssimazioni, le condizioni cinematiche vincolano la variabile z a spaziare nell'intervallo tra 0 e $2\sqrt{(1-x)(1-y)}$, per x e y assegnati.

Quindi tenendo conto delle condizioni su x e y , si ha

$$0 \leq z \leq 2\sqrt{(1-x)(1-y)} \leq 2\sqrt{\delta x \delta y}.$$

A questo punto, se la risoluzione in z è superiore a $2\sqrt{\delta x \delta y}$, la regione

$$2\sqrt{\delta x \delta y} \leq z \leq \delta z$$

³ Molti dettagli si possono trovare negli articoli [Kuno e Okada, 1996; Kuno *et al.*, 1997] e nelle referenze ivi citate.

⁴ Con δx ecc. indichiamo la semi-larghezza a mezza altezza, Half Width at Half Maximum (HWHM) che è esattamente la metà della Full Width at Half Maximum (FWHM).

è proibita dalla cinematica e per z la regione del segnale è data da

$$0 \leq z \leq \min(\delta z, 2\sqrt{(1-x)(1-y)}).$$

Tutto ciò ci permette di calcolare il branching ratio per il decadimento radiativo sulla regione del segnale. Infatti, integrando $d\Gamma$

$$\begin{aligned} dB(\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma) &\equiv \frac{d\Gamma}{\Gamma_{\text{tot}}} \\ &= \frac{\alpha}{16\pi} [J_1(1 - P_\mu \cos \theta_e) + J_2(1 + P_\mu \cos \theta_e)] d(\cos \theta_e) \end{aligned}$$

con

$$J_1 = \int d\tau F_1 \quad J_2 = \int d\tau F_2$$

e gli integrali sono calcolati sulla regione del segnale

$$\begin{aligned} 1 - \delta x &\leq x \leq 1, \\ 1 - \delta y &\leq y \leq 1, \\ 0 &\leq z \leq \min(\delta z, 2\sqrt{(1-x)(1-y)}). \end{aligned}$$

Le funzioni J_1 e J_2 risultano dei polinomi in δx , δy e δz .

Per fissare le idee, consideriamo il caso di muoni non polarizzati, $P_\mu = 0$. Allora, con un'ulteriore integrazione, si ottiene facilmente

$$B(\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma) = \frac{\alpha}{8\pi} (J_1 + J_2).$$

Dal punto di vista sperimentale, la risoluzione in energia del positrone è migliore di quella del fotone, $\delta x < \delta y$, mentre quella angolare è sempre stata scarsa negli esperimenti passati. Ciò suggerisce di considerare $\delta z \geq 2\sqrt{\delta x \delta y}$. In tal caso le funzioni J_1 e J_2 sono date da

$$J_1 = (\delta x)^4 (\delta y)^2, \quad J_2 = \frac{8}{3} (\delta x)^3 (\delta y)^3.$$

Esse non dipendono da δz (a differenza del caso $\delta z < 2\sqrt{\delta x \delta y}$ [Kuno e Okada, 1996]), cioè la risoluzione angolare non influenza il branching ratio del quale si può realizzare il *contour plot* in funzione di δx e δy . Il risultato è riportato nella figura 2.1. Come si vede, con delle risoluzioni $\delta x = \delta y = 0.01$, il branching ratio è dell'ordine di 10^{-15} .

2.3 IL FONDO *accidentale* o *combinatorio*

Con le elevate intensità di muoni utilizzati negli esperimenti moderni, la possibilità di rilevare in modo accidentale un positrone ed un fotone appartenenti a processi diversi, può diventare la fonte principale che ostacola la ricerca del decadimento $\mu \rightarrow e \gamma$.

L'evento più comune è che il positrone, proveniente da un decadimento di Michel, venga registrato simultaneamente ad un γ di un decadimento radiativo, entrambi con energia approssimativa di 52.8 MeV. Proviamo a fare una stima del branching ratio accidentale per questo tipo di eventi.

Indichiamo con f_e^0 la frazione dello spettro del positrone, integrata sulla regione del segnale e, analogamente, con f_γ^0 quella del fotone. Allora, se R_μ

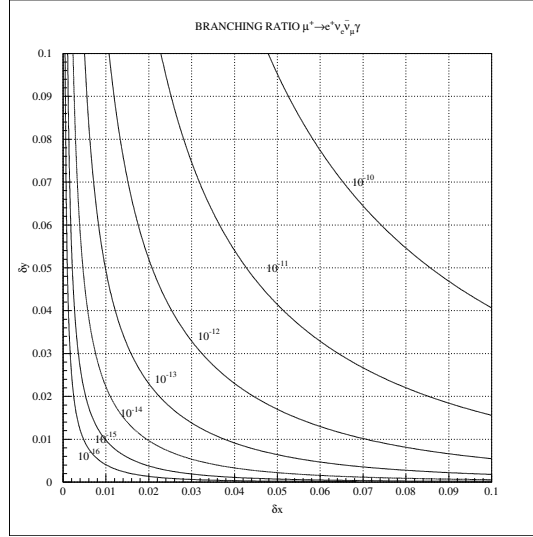


Figura 2.1: Branching ratio per il decadimento radiativo del muone

è il flusso istantaneo di muoni ed Ω è l'accettanza dell'apparato, il numero di positroni erroneamente attribuibili ad un $\mu \rightarrow e\gamma$ risulta

$$N_{\text{acc}}^e = R_{\mu} \cdot f_e^0 \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \cdot \varepsilon_e.$$

Similmente, quello per i fotoni è

$$N_{\text{acc}}^{\gamma} = R_{\mu} \cdot f_{\gamma}^0 \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \cdot \varepsilon_{\gamma}.$$

Qui ε_e e ε_{γ} indicano le efficienze di rivelazione delle rispettive particelle.

Il nostro *falso positivo*, però, è costituito dall'osservazione in simultanea di un e^+ e di un γ , e con il vincolo ulteriore di una cinematica back to back. Quindi se la risoluzione sulla coincidenza temporale è $\Delta t_{e\gamma}$ e quella sulla limitazione angolare è $\Delta\omega_{e\gamma}$ (entrambe come *FWHM*), allora il numero totale di eventi di background risulta

$$N_{\text{acc}} = N_{\text{acc}}^e \cdot N_{\text{acc}}^{\gamma} \cdot \frac{\Delta\omega_{e\gamma}}{\Omega} \cdot \Delta t_{e\gamma} \cdot T,$$

essendo T la durata complessiva dell'osservazione.

Per poter ricavare il branching ratio, B_{acc} dobbiamo tener conto del flusso utile di muoni,

$$N_{\mu} = R_{\mu} \cdot T \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \cdot \varepsilon_e \cdot \varepsilon_{\gamma},$$

da cui si ricava

$$B_{\text{acc}} \equiv \frac{N_{\text{acc}}}{N_{\mu}} = R_{\mu} \cdot f_e^0 \cdot f_{\gamma}^0 \cdot \frac{\Delta\omega_{e\gamma}}{4\pi} \cdot \Delta t_{e\gamma}.$$

La frazione f_e^0 può essere valutata usando uno spettro di Michel per il positrone. Tenendo conto che, sulla regione del segnale, lo spettro è quasi piatto, il risultato è

$$f_e^0 \approx 2\delta x.$$

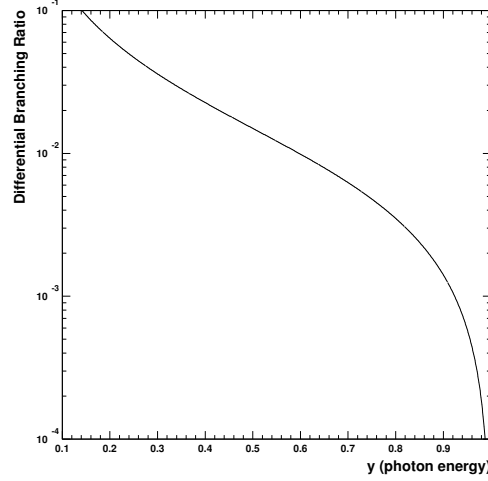


Figura 2.2: Spettro differenziale del fotone nel decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma$

Invece per una stima di f_γ^0 , l'unica complicazione è che, per un γ radiativo, bisogna utilizzare il relativo spettro differenziale, $dB(\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma)/dy$ [Kuno *et al.*, 1997], il cui grafico, per muoni non polarizzati, è riportato nella figura 2.2. Qui si ottiene

$$f_\gamma^0 = \int_{1-\delta y}^1 dy \frac{dB(\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma)}{dy} \approx \left[\frac{\alpha}{2\pi} (\delta y)^2 [\ln(\delta y) + 7.33] \right].$$

Se ora introduciamo la risoluzione $\delta\theta_{e\gamma}$ (HWHM) sull'angolo tra positrone e gamma, quella sul il vincolo cinematico $\Delta\omega_{e\gamma}$ diventa

$$\frac{\Delta\omega_{e\gamma}}{4\pi} = \frac{\pi(\delta\theta_{e\gamma})^2}{4\pi} = \frac{(\delta\theta_{e\gamma})^2}{4},$$

ed il nostro B_{acc} può scriversi in termini delle sole risoluzioni δx , δy , $\delta\theta_{e\gamma}$ e $\delta t_{e\gamma}$,

$$B_{acc} \approx R_\mu \cdot (2\delta x) \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} (\delta y)^2 [\ln(\delta y) + 7.33] \right\} \cdot \frac{(\delta\theta_{e\gamma})^2}{4} \cdot (2\delta t_{e\gamma}).$$

Se assumiamo qualche valore concreto, ad esempio, 1% per la risoluzione dell'energia del positrone, 6% per quella del γ , $\Delta\omega_{e\gamma} \approx 3 \times 10^{-4}$ sr, $\Delta t_{e\gamma} \approx 1$ ns (tutti valori FWHM), ed un flusso di muoni $R_\mu \approx 3 \times 10^8 \mu^+/s$, allora $B_{acc} \approx 3 \times 10^{-13}$. Questo risultato indica che il fondo accidentale può severamente limitare la ricerca del $\mu \rightarrow e\gamma$. Diventa importante, quindi, cercare di ridurre significativamente le risoluzioni del rivelatore.

Nell'espressione scritta per B_{acc} notiamo che, migliorando la risoluzione energetica del γ e quella angolare, si ottiene una soppressione quadratica del fondo accidentale, mentre la riduzione è solo lineare agendo su δx . Dato che B_{acc} dipende linearmente dal flusso di muoni, R_μ , migliorare la risoluzione in energia del positrone equivale ad aumentare tale intensità, ciò, però, incrementa pure la probabilità di *pile-up*, cioè che due eventi non correlati siano ricostruiti, magari come un unico segnale positivo.⁵

Oltre al decadimento radiativo del muone, ci sono altre sorgenti di fotoni

⁵ Ad esempio due γ con energie ~ 25 MeV, identificati come un singolo fotone di ~ 50 MeV.

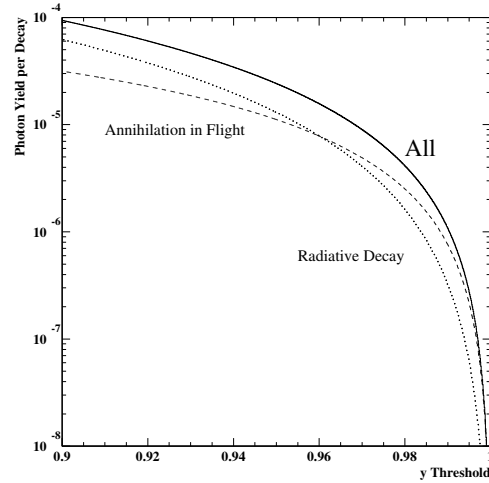


Figura 2.3: Intensità del fondo di fotoni

d'alta energia, quali l'annichilazione in volo di positroni di Michel e processi di bremsstrahlung. Il contributo da parte dell'annichilazione dei positroni dipende dal materiale attraversato nel bersaglio. Un esempio è mostrato nella figura 2.3. Come si vede, lo spessore del bersaglio (cioè l'annichilazione) influisce relativamente poco rispetto al fondo radiativo, e predomina solo quando la risoluzione sull'energia del fotone è molto buona.

2.4 MUONI POLARIZZATI E FONDI

In questo paragrafo vogliamo brevemente accennare al fatto che l'utilizzo di muoni polarizzati non solo consente di discriminare vari modelli teorici (come abbiamo visto al § 1.5.1, pag. 22) ma permette anche di attenuare i fondi che sono critici per la ricerca del $\mu \rightarrow e\gamma$.

Per quanto riguarda il fondo fisico, ad esempio, il branching ratio discusso al § 2.2 di pagina 29 riceve due contributi: quello in J_1 , con i positroni emessi in direzione opposta allo spin del muone, e quello in J_2 , con gli e^+ concordi con detto spin. Se la risoluzione in energia del positrone è migliore di quella del fotone, $\delta x < \delta y$, si può facilmente verificare che $J_2 > J_1$ e quindi al fondo fisico contribuiscono prevalentemente i positroni che seguono la distribuzione $1 + P_\mu \cos \theta_e$. Ciò ci fa comprendere che se nella ricerca del $\mu \rightarrow e\gamma$ selezioniamo i positroni che si muovono in verso opposto allo spin del muone, allora abbiamo ridotto significativamente il fondo fisico (fig. 2.4). Naturalmente, nel fare questo, manteniamo elevata solo l'accettanza del decadimento $\mu^+ \rightarrow e_R^+ \gamma$ poiché segue la distribuzione $1 - P_\mu \cos \theta_e$. Oltre a ciò, variando le risoluzioni δx e δy (da cui dipendono J_1 e J_2), possiamo cambiare la distribuzione angolare del decadimento radiativo, ottenendo così un altro modo per discriminare il background fisico.

Lo stesso principio vale per l'attenuazione del fondo accidentale. Infatti molte sorgenti di tale fondo hanno distribuzioni angolari ben precise quando si usano muoni polarizzati. Ad esempio, quando il muone nel decadimento di Michel è polarizzato, il positrone viene emesso in preferenza lungo la direzione della polarizzazione, cioè segue la distribuzione $1 + P_\mu \cos \theta_e$. Questo vale anche per i γ di alta energia ($> 50 \text{ MeV}$) del decadimento radiativo.

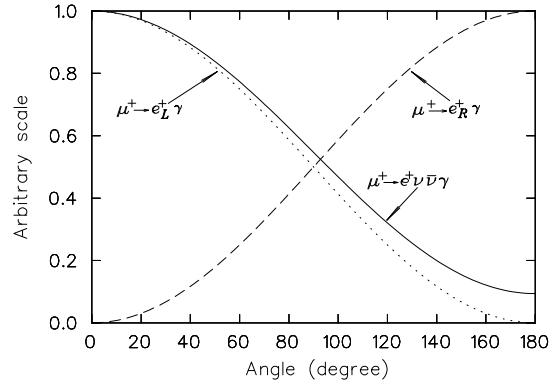


Figura 2.4: Distribuzione angolare dei positroni nel decadimento radiativo

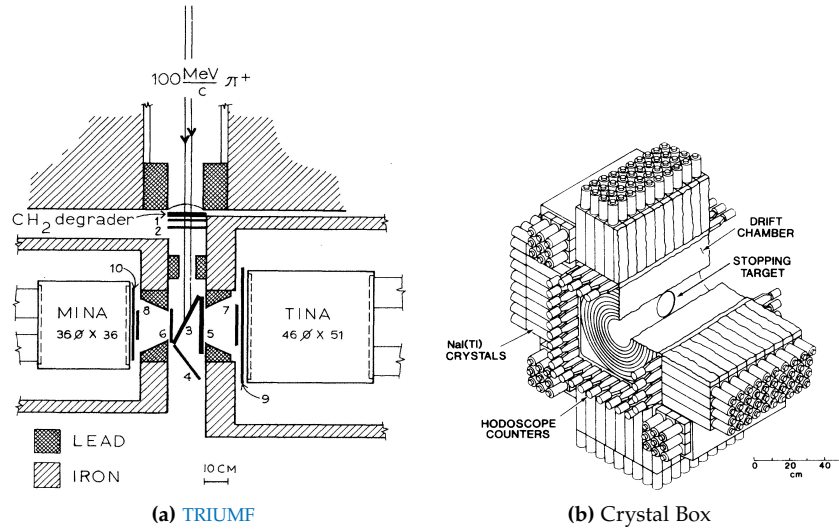


Figura 2.5: Apparatı sperimentali per la ricerca del $\mu \rightarrow e \gamma$

2.5 STATO DELLA RICERCA SPERIMENTALE SUL DECADIMENTO $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$

Come abbiamo visto (§ 1.1, pag. 3), le ricerche sul decadimento $\mu \rightarrow e \gamma$ sono iniziate più di 50 anni fa con Hincks e Pontecorvo nel 1947.

I primi esperimenti usavano camere a scintilla (*spark chambers*) per rivelare sia il positrone che il fotone [Hincks e Pontecorvo, 1948; Parker *et al.*, 1964]. In seguito divennero comuni le configurazioni che utilizzavano due grossi cristalli di NaI, disposti uno di fronte all'altro per una migliore determinazione dell'energia e del *timing*. Un esempio, relativo all'esperimento TRIUMF [Depommier *et al.*, 1977], è mostrato nella figura 2.5a. Un'esasperazione di questa tecnica si è avuta con l'esperimento *Crystal Box*, nel 1988, il quale utilizzava un calorimetro quasi a 4π , costituito da 396 cristalli di NaI(Tl) e da un insieme di camere a drift cilindriche, tutto attorno al bersaglio utilizzato per lo stop di muoni (fig. 2.5b) [Bolton *et al.*, 1988].

Successivamente, la possibilità di avere fasci di muoni di elevata intensità, e con energia maggiore, ha contribuito notevolmente alla realizzazione di nuovi esperimenti.

Con l'aumentare dell'energia, però, era necessario disporre di bersagli più spessi per fermare le particelle. Di conseguenza, il positrone, nell'at-

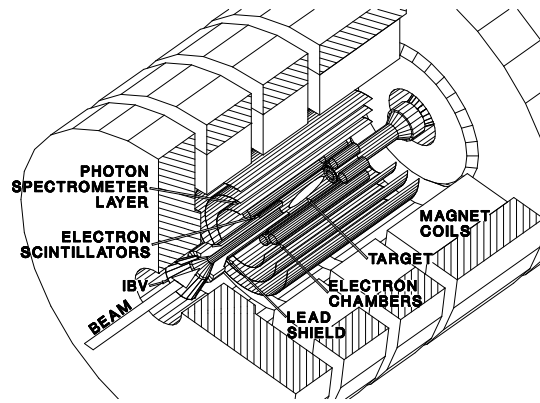


Figura 2.6: Il rivelatore MEGA

traversare il materiale aveva una perdita maggiore di energia e ciò sminuiva gli sforzi per una risoluzione migliore. Ad esempio, nell'esperimento presso lo Schwerezeresches Institut für Nuklearforschung (SIN),⁶ il solo bersaglio introduceva un'incertezza di 4 MeV/c sulla quantità di moto del positrone [Van der Schaaf *et al.*, 1980].

Un miglioramento si è avuto quando è stata introdotta la tecnica dei muoni di *superficie*. Questi sono originati dal decadimento di pioni fermati sulla superficie di bersagli secondari. La caratteristica di questi muoni è che, essendo generati da un decadimento a riposo di un pione, il loro impulso è circa 29 MeV/c. Quindi richiedono un bersaglio di spessore minore per essere fermati.

L'esperimento più recente, la collaborazione MEGA [Brooks *et al.*, 1999], è stato realizzato alla fine degli anni '90 presso il Los Alamos National Laboratory (LANL). Il rivelatore di questo esperimento era costituito da uno spettrometro magnetico per il positrone e tre spettrometri a coppie, concentrici, per il fotone. Il tutto era immerso in un magnete superconduttore, con campo magnetico solenoidale di 1.5 T. Lo spettrometro magnetico racchiudeva un insieme di camere a fili cilindriche e i contatori a scintillazione per il *timing*. La risoluzione (FWHM) in energia per un positrone di 52.8 MeV era compresa nell'intervallo tra 0.5 MeV e 0.85 MeV, in base al numero di giri che la traccia effettuava. Ciascuno strato dello spettrometro a coppie, invece, aveva dei convertitori al piombo, delle camere proporzionali multifili (*multiwire*), delle camere a drift e scintillatori. L'energia del fotone aveva una risoluzione (FWHM) di 1.7 MeV sullo strato esterno del convertitore al piombo e di 3.0 MeV su quello più interno. I muoni di superficie con impulso di 29.8 MeV/c erano fermati da un foglio di mylar posto al centro del rivelatore. Tutte le particelle cariche generate dal decadimento dei muoni erano intrappolate dal campo magnetico dello spettrometro. In numero totale di muoni fermati è stato valutato in 1.2×10^{14} . L'analisi dei dati raccolti ha fissato il limite superiore del branching ratio per il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ a 1.2×10^{-11} . La figura 2.6 dà una rappresentazione schematica dell'apparato.

Nella ricerca del $\mu \rightarrow e \gamma$ gli sforzi sperimentali si sono concentrati soprattutto nel migliorare le risoluzioni di rivelazione per quattro variabili fondamentali: l'energia, E_e , del positrone; quella, E_γ , del fotone; la coincidenza temporale (*timing*), $t_{e\gamma}$, tra e^+ e γ ; l'angolo, $\theta_{e\gamma}$, tra i medesimi. Un riassunto dei risultati principali è riportata nella tabella 2.2.

⁶ L'attuale Paul Scherrer Institute (PSI).

2.6 ALTRI PROCESSI CON LA LFV

Come promesso, qui vogliamo riassumere brevemente i principali processi che violano la conservazione del numero leptonico oltre al decadimento $\mu \rightarrow e \gamma$.

2.6.1 Il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$

Accanto al decadimento $\mu \rightarrow e \gamma$, questo è uno dei decadimenti più studiati per la ricerca della LFV. Dal punto di vista teorico è generato da un termine d'interazione a quattro fermioni nella lagrangiana. La segnatura dell'evento è ben evidente. Infatti, nello stato finale ci sono tutte particelle rivelabili e nel sistema di quiete del muone si può sfruttare completamente la conservazione dell'energia e della quantità di moto; per di più, la coppia di positroni è in coincidenza temporale con l'elettrone.

Uno dei principali processi di background fisico è quello in cui il muone decade nella tripletta elettronica, accompagnata da una coppia di neutrini, $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e \bar{\nu}_\mu$,⁷ quando questi portano via una quantità minima di energia (un po' come avviene nel decadimento radiativo per il $\mu \rightarrow e \gamma$).

Il fondo accidentale, invece, è costituito di processi in cui si verifica la coincidenza (accidentale, appunto) tra un positrone di un decadimento normale del muone e una coppia non correlata di $e^+ e^-$. Questa potrebbe essere prodotta, ad esempio, da uno *scattering Bhabha* oppure dalla conversione di un γ radiativo. In questo caso, però, il fondo può essere *facilmente* rimosso perché la coppia $e^+ e^-$ avrebbe una piccola massa invariante e quindi basterebbe escludere gli eventi che presentano l'angolo di apertura tra la coppia di particelle al di sotto di una certa soglia. Tuttavia, questo causerebbe anche la perdita di sensibilità sul segnale, soprattutto per quei modelli teorici per i quali il processo avviene tramite diagrammi di Feynman *fotonici*.

Un altro evento di background accidentale è costituito da un positrone che inverte il suo moto e torna indietro verso il bersaglio. Qui potrebbe essere rivelato in coincidenza con un elettrone simulando, in questo modo, una coppia $e^+ e^-$. Fortunatamente l'angolo tra la coppia sarebbe di circa 180° e quindi l'evento potrebbe essere rigettato.

Sperimentalmente, la prima ricerca pionieristica di questo processo è stata fatta nel 1976, usando uno spettrometro cilindrico. Tra le ricerche più significative ricordiamo quelle che hanno utilizzato lo spettrometro SINDRUM presso lo SIN (l'attuale PSI). Esse hanno utilizzato un flusso di circa $5 \times 10^6 \mu^+/\text{s}$ di muoni di superficie. Le coppie $e^+ e^-$ venivano tracciate dallo spettrometro che era costituito da cinque camere proporzionali multifili concentriche e

⁷ Con branching ratio $(3.4 \pm 0.4) \times 10^{-5}$.

Tabella 2.2: Risoluzioni (FWHM) e limiti nella ricerca per $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$

Luogo	ΔE_e	ΔE_γ	$\Delta t_{e\gamma}$	$\Delta \theta_{e\gamma}$	Limite superiore	Referenze
TRIUMF	10 %	8.7 %	6.7 ns		$< 3.6 \times 10^{-9}$	Depommier <i>et al.</i> [1977]
SIN	8.7 %	9.3 %	1.4 ns		$< 1.0 \times 10^{-9}$	Van der Schaaf <i>et al.</i> [1980]
LANL	8.8 %	8 %	1.9 ns	37 mrad	$< 1.7 \times 10^{-10}$	Kinnison <i>et al.</i> [1982]
LANL	8 %	8 %	1.8 ns	87 mrad	$< 4.9 \times 10^{-11}$	Bolton <i>et al.</i> [1988]
MEGA	1.2 %	4.5 %	1.6 ns	15 mrad	$< 1.2 \times 10^{-11}$	Brooks <i>et al.</i> [1999]

Tabella 2.3: Sommario delle ricerche sul decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$

Luogo	Limite superiore	Referenze
JINR	$< 1.9 \times 10^{-9}$	Korenchenko <i>et al.</i> [1976]
LANL	$< 1.3 \times 10^{-10}$	Bolton <i>et al.</i> [1984]
PSI	$< 1.6 \times 10^{-10}$	Bertl <i>et al.</i> [1984]
PSI	$< 2.4 \times 10^{-12}$	Bertl <i>et al.</i> [1985]
LANL	$< 3.5 \times 10^{-11}$	Bolton <i>et al.</i> [1988]
PSI	$< 1.0 \times 10^{-12}$	Bellgardt <i>et al.</i> [1988]
JINR	$< 3.6 \times 10^{-11}$	Baranov <i>et al.</i> [1991]

64 contatori a scintillazione. Il tutto in un campo solenoidale di 0.33 T. La risoluzione sull'impulso era $\Delta p/p = 12.0(3) \%$, con $p = 50 \text{ MeV}/c$.

Un riassunto dei risultati ottenuti sul limite superiore al branching ratio per questo decadimento è riportato nella tabella 2.3.

2.6.2 La $\mu - e$ conversion

Normalmente quando un muone negativo viene fermato in un materiale, esso è catturato dall'atomo del mezzo e da origine a quello che è chiamato *atomo muonico* o μ -mesico (in cui il muone sostituisce un elettrone). Il muone così catturato subisce una serie di *cascade* (emettendo prevalentemente raggi X) verso i livelli più bassi, fino ad arrivare allo stato fondamentale $1s$. Qui il destino del muone è quello o di un decadimento normale ($\mu \rightarrow e \nu \bar{\nu}$), in volo, oppure è catturato dal nucleo con il processo

$$\mu^- + (A, Z) \rightarrow \nu_\mu + (A, Z - 1),$$

in cui A e Z sono, rispettivamente, il *numero di massa* ed il *numero atomico* del nucleo. Questo è ciò che accade normalmente. Se però ammettiamo una Fisica oltre il Modello Standard, allora possiamo attenderci la LFV attraverso la reazione

$$\mu^- + (A, Z) \rightarrow e^- + (A, Z),$$

che è la $\mu - e$ *conversion* qui discussa: essa viola (di una unità) la conservazione sia del numero leptonico elettronico (L_e) che quello muonico (L_μ). Invece il numero leptonico complessivo è conservato.

Ciò che qui ci preme sottolineare è che, dal punto di vista sperimentale, il processo è molto interessante. Infatti, si intuisce facilmente che l'elettrone finale è monoenergetico,

$$E_e = m_\mu - B_{1s} - E_N \approx m_\mu - B_{1s}.$$

Nell'espressione precedente, B_{1s} è l'energia di legame dello stato fondamentale dell'atomo muonico mentre E_N è l'energia di rinculo del nucleo, la quale, dato che $E_N \propto 1/m_N$ (m_N è la massa del nucleo), può essere trascurata.

L'energia di legame, B_{1s} , dipende dal nucleo del materiale utilizzato. Questo significa che il *picco* del segnale per E_e è differente per materiali diversi: va da un valore di 104.3 MeV per il titanio fino a 94.9 MeV per il piombo. Dato che $E_e \sim 10^2 \text{ MeV}$, il segnale è abbastanza *lontano* dall'estremo superiore dello spettro di Michel (52.8 MeV). Dobbiamo pure osservare che l'elettrone finale non deve essere rivelato in coincidenza con altre particelle. La ricerca

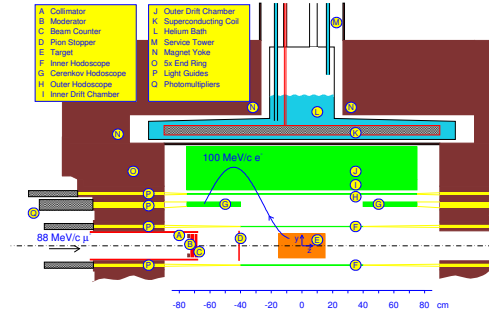


Figura 2.7: Il rivelatore SINDRUM-II

sulla $\mu - e$ conversion, allora, può sfruttare pienamente le potenzialità dei fasci di muoni di elevata intensità senza risentire delle problematiche legate ai fondi accidentali che affliggono invece il decadimento $\mu \rightarrow e \gamma$.

Tra le possibili sorgenti di background ci sono diversi processi. Uno dei principali è il decadimento in orbita del muone nell'atomo muonico.⁸ Esso può dare origine ad un elettrone la cui energia è vicina a quella del segnale. Altre fonti di background sono: la cattura radiativa dei pioni, $\pi^- + (A, Z) \rightarrow \nu_\mu + (A, Z - 1) + \gamma$, e quella dei muoni, $\mu^- + (A, Z) \rightarrow \nu_\mu + (A, Z - 1) + \gamma$. In questi casi il γ può subire delle conversioni in $e^+ e^-$, con un positrone non osservato e l'elettrone che dà falsi positivi.

Diversi esperimenti sono stati realizzati con lo spettrometro SINDRUM-II presso il PSI. Si tratta di un apparato costituito da un insieme di camere a drift cilindriche e concentriche, sistemate all'interno di un magnete superconduttore, solenoidale, con campo di 1.2 T. Uno schema del rivelatore è mostrato nella figura 2.7. I muoni negativi ($p = 90 \text{ MeV/c}$) venivano fermati da un bersaglio posto al centro del rivelatore. Le particelle cariche con impulso trasverso superiore alla soglia di 80 MeV/c raggiungevano le camere più esterne; quelle al di sotto della soglia erano confinate dal campo dello spettrometro. Nella regione del segnale è stata raggiunta una risoluzione (FWHM) sull'impulso del 2.8 %. Nell'analisi *off-line* per la rimozione dei fondi, venivano eliminati gli eventi che presentavano un ritardo di tempo piccolo tra le tracce nello spettrometro e il segnale dei contatori di fascio. Nella tabella 2.4 presentiamo una sintesi dei risultati ottenuti sulla $\mu - e$ conversion.

Se si confrontano i limiti riportati nella tabella appena citata con quelli ottenuti sul decadimento $\mu \rightarrow e \gamma$ (tab. 2.2, pag. 38), si può notare che nella

⁸ Questo processo è anche chiamato il *decadimento del muone legato*.

Tabella 2.4: Sommario delle ricerche sulla $\mu - e$ conversion

Processo	Luogo	Limite superiore	Referenze
$\mu^- \text{Cu} \rightarrow e^+ \text{Co}$	SREL	$< 1.6 \times 10^{-8}$	Bryman <i>et al.</i> [1972]
$\mu^- {}^{32}\text{S} \rightarrow e^- {}^{32}\text{S}$	SIN	$< 7 \times 10^{-11}$	Badertscher <i>et al.</i> [1982]
$\mu^- \text{Ti} \rightarrow e^- \text{Ti}$	TRIUMF	$< 1.6 \times 10^{-11}$	Bryman <i>et al.</i> [1985]
$\mu^- \text{Ti} \rightarrow e^- \text{Ti}$	TRIUMF	$< 4.6 \times 10^{-12}$	Ahmad <i>et al.</i> [1988]
$\mu^- \text{Pb} \rightarrow e^- \text{Pb}$	TRIUMF	$< 4.9 \times 10^{-10}$	Ahmad <i>et al.</i> [1988]
$\mu^- \text{Ti} \rightarrow e^- \text{Ti}$	PSI	$< 4.3 \times 10^{-12}$	Dohmen <i>et al.</i> [1993]
$\mu^- \text{Pb} \rightarrow e^- \text{Pb}$	PSI	$< 4.6 \times 10^{-11}$	Honecker <i>et al.</i> [1996]
$\mu^- \text{Ti} \rightarrow e^- \text{Ti}$	PSI	$< 6.1 \times 10^{-13}$	Wintz [1998]

Tabella 2.5: Sommario delle ricerche sulla conversione $\text{Mu} - \overline{\text{Mu}}$

Luogo	$G_{\text{Mu}-\overline{\text{Mu}}}/G$	Referenze
TRIUMF	< 42	Marshall <i>et al.</i> [1982]
TRIUMF	< 20	Beer <i>et al.</i> [1986]
TRIUMF	< 0.29	Huber <i>et al.</i> [1990]
LANL	< 0.16	Matthias <i>et al.</i> [1991]
LANL	< 6.9	Ni <i>et al.</i> [1993]
PSI	< 0.018	Abela <i>et al.</i> [1996]
JINR	< 0.14	Gordeev <i>et al.</i> [1997]
PSI	< 0.003	Willmann <i>et al.</i> [1999]

$\mu - e$ conversion essi tendono ad essere inferiori. In realtà bisogna considerare che la $\mu - e$ conversion non è un processo, per così dire, *puramente leptónico*, ci dobbiamo aspettare dei contributi dovuti all'interazione con il nucleo. Infatti i modelli teorici suddividono i contributi al processo in: fotonici [Weinberg e Feinberg, 1959] e non fotonici [Marciano e Sanda, 1977]. Per cui esso può avvenire con dei meccanismi che non contribuiscono al decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$. In pratica la sensibilità della $\mu - e$ conversion è da 10 a 100 volte peggiore di quella del processo diretto ($\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$) quindi un limite di 10^{-13} corrisponde in realtà ad un limite per $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ di circa 10^{-12} – 10^{-11} .

2.6.3 La conversione muonio-antimuonio

Il muonio è un atomo idrogenoide in cui il nucleo è sostituito da un muone, μ^+ . Si presenta, dunque, come uno stato legato tra muone ed elettrone. La conversione della coppia $\mu^+ e^-$ in $\mu^- e^+$, e viceversa, è un altro processo in cui si manifesta la LFV. Rispetto a casi visti finora, qui la violazione è tale che $\Delta L_e = \pm 2$ e $\Delta L_\mu = \pm 2$.⁹ Curiosamente, la possibilità di studiare questo sistema per una eventuale ricerca della LFV fu suggerita inizialmente da B. Pontecorvo nel 1957 [Pontecorvo, 1957], prima ancora che il muonio fosse effettivamente osservato al ciclotrone di Nevis [Hughes *et al.*, 1960].

Dal punto di vista teorico, si sviluppano dei modelli fenomenologici il cui risultato principale è il calcolo della probabilità totale di conversione [Feinberg e Weinberg, 1961; Willmann e Jungmann, 1997],

$$P_{\text{Mu}-\overline{\text{Mu}}}^0 = 2.56 \times 10^{-5} \cdot \left(\frac{G_{\text{Mu}-\overline{\text{Mu}}}}{G} \right)^2,$$

dove $G_{\text{Mu}-\overline{\text{Mu}}}$ è la costante di accoppiamento che definisce l'intensità della conversione e G , la costante di Fermi.

La ricerca sperimentale tenta di identificare un atomo di antimuonio dopo la produzione iniziale di uno di muonio. La segnatura dell'evento consiste in un e^- di alta energia, prodotto dal decadimento standard del muone, ed in un positrone residuo con energia media di 13.5 eV. Infatti questa è l'energia di legame tipica del livello 1s nel muonio. Il fatto che i muoni negativi tendano ad essere catturati dagli atomi del mezzo, abbassa la sensibilità in questa ricerca. Negli esperimenti più recenti, infatti, si utilizzano atomi di muonio prodotti nel vuoto.

Le sorgenti principali di background sono essenzialmente due. Una è costituita dalla coincidenza di un e^+ di bassa energia con un elettrone prodotto

⁹ Ci interessa notare che L_e e L_μ si conservano *moltiplicativamente* [Feinberg e Weinberg, 1961].

dallo scattering Bhabha. Questo è causato da un positrone proveniente dal decadimento normale del μ^+ nell'atomo muonico. La seconda (di natura fisica) è rappresentata dal decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e \bar{\nu}_\mu$ (nota 7, pag. 38) quando l'elettrone è energetico e solo uno dei due positroni è rivelato. Anche qui mostriamo un riassunto dei principali risultati sperimentali nella tabella 2.5.

Dove sono Ella, Kate, Mag, Lizzie e Edith,
il tenero cuore, l'anima semplice, la rumorosa,
l'orgogliosa, la felice?
Tutte, tutte, dormono sulla collina.

EGDAR LEE MASTERS
Antologia di Spoon River

In questo capitolo descriveremo i principi fondamentali su cui si basa l'esperimento MEG [Mori *et al.*, 1999]. Lo scopo è quello di ricercare il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ con una sensibilità dell'ordine di 10^{-14} , un valore questo che sta due ordini di grandezza sotto il limite attuale riportato dalla collaborazione MEGA [Brooks *et al.*, 1999].

Abbiamo visto (§ 1.5, pag. 21) come i modelli teorici più accreditati prevedano un branching ratio proprio di questo ordine di grandezza. Quindi MEG ha concrete possibilità di identificare un tale decadimento. Se invece il risultato fosse negativo, le conseguenze sarebbero comunque notevoli perché metterebbe dei limiti severi alle teorie fin qui sviluppate.

L'esperimento è il frutto di una collaborazione internazionale di fisici italiani, giapponesi, russi, americani e svizzeri. La sua realizzazione è presso lo PSI (Svizzera), dove si trova, allo stato attuale, la più intensa sorgente di muoni a bassa energia.

3.1 L'IDEA DELL'ESPERIMENTO

Il principio di funzionamento dell'esperimento MEG è veramente molto semplice: l'apparato deve identificare la coppia di particelle (e^+ , γ) in coincidenza temporale, emessa in condizioni cinematiche *back to back*, con energie che sono la metà della massa del muone. Il fascio di muoni è fermato in un sottile bersaglio posto al centro dell'apparato. L'impulso del positrone è misurato da un insieme di camere a deriva, Drift Chamber (DC) System, immerse in un campo magnetico *non* uniforme, mentre il suo tempo di volo è determinato dal sistema di contatori a scintillazione, Timing Counter (TC) System. L'energia e il tempo di volo del fotone sono misurati dal calorimetro a xenon liquido scintillante, Liquid Xenon Calorimeter (LXC). Sia il calorimetro che lo spettrometro hanno la disposizione geometrica per poter osservare una coincidenza *back to back* tra positrone ed fotone di alta energia, e coprono complessivamente circa il 10 % di angolo solido. Una rappresentazione schematica del rivelatore è riportata nella figura 3.1.

La sfida sperimentale è dunque quella di raggiungere delle risoluzioni estreme ed un'alta efficienza, soprattutto per escludere il fondo accidentale.

Se consideriamo la sensibilità sul singolo evento, Single Event Sensitivity (SES), questa è definita come il branching ratio per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ tale che il numero di eventi osservati è pari ad uno. Assegnato il valore di $B(\mu \rightarrow e\gamma)$, il numero di eventi è dato da

$$N_{ev} = R_{\mu} \cdot T \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \cdot \varepsilon_e \cdot \varepsilon_{\gamma} \cdot \varepsilon_{sel} \cdot B(\mu \rightarrow e\gamma),$$

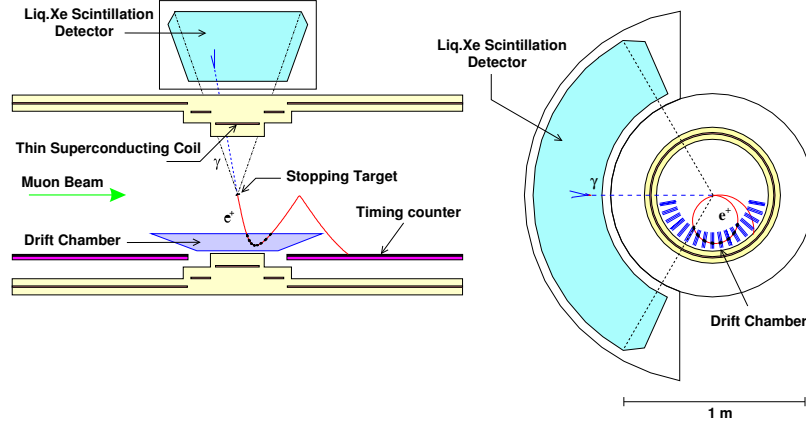


Figura 3.1: Vista schematica del rivelatore MEG

dove R_μ e T sono, rispettivamente, il flusso di muoni e la durata dell'esperimento;¹ Ω è l'angolo solido coperto dall'apparato mentre ε_e è l'efficienza di rivelazione del positrone, ε_γ quella per il fotone; ε_{sel} è l'efficienza di selezione dell'evento. Essa tiene conto che alle quattro variabili fondamentali (E_e , E_γ , $t_{e\gamma}$, $\theta_{e\gamma}$) viene applicato un taglio al 90 % quando sono ricostruite, cioè dipende dalla risoluzione del rivelatore.² Se assumiamo dei valori tipici quali $\varepsilon_e \approx 0.9$, $\varepsilon_\gamma \approx 0.6$, $\varepsilon_{\text{sel}} \approx (0.9)^4 \approx 0.66$, in un anno di esperimento ($T \approx 2.6 \times 10^7$ s) e con un flusso di muoni $R_\mu \approx 3 \times 10^7 \mu^+/\text{s}$ otteniamo per la SES un valore di circa 3.6×10^{-14} . Il fatto però che il numero di eventi accidentali, N_{acc} , dipende quadraticamente da R_μ ,³ suggerisce che con una durata maggiore ad una intensità più bassa aumenti la sensibilità dell'esperimento. Infatti già per $T \approx 3.5 \times 10^7$ s e $R_\mu \approx 1.2 \times 10^7 \mu^+/\text{s}$ si ha $\text{SES} \approx 6.7 \times 10^{-14}$.

3.2 FASCIO E BERSAGLIO

3.2.1 Il fascio

Un punto centrale in questa discussione è che, data la rarità dell'evento, per poter abbassare il limite sperimentale sul decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ è necessario disporre della fonte più intensa di muoni. Infatti con un branching ratio di 10^{-14} , in un anno ($t \sim 10^7$ s) dobbiamo disporre almeno di 10^{14} muoni; se lavoriamo con un'efficienza, ε , del 10 %, allora il flusso di muoni deve essere almeno $R_\mu \approx 10^{14}/t \cdot \varepsilon \sim 10^8 \mu^+/\text{s}$.

Ora, tra le *fabbriche* di muoni ne esistono di due tipi fondamentali: quelle che producono fasci impulsati di muoni e quelle che ne producono un flusso continuo. Nelle prime, i muoni vengono *impacchettati* in *bunch* di una data *lunghezza* temporale (diciamo T_1), e tra due *bunch* consecutivi esiste un certo ritardo di tempo (diciamo T_2). Il rapporto ($T_1/(T_1 + T_2)$) tra la durata del *bunch* ed il tempo totale di chiama *duty cycle* del fascio. Nelle seconde, invece, i muoni vengono prodotti con un *duty cycle* che è circa 1. A parità di flusso di muoni, il picco maggiore si ha con i fasci impulsati. Il fatto che nel fondo accidentale, positrone e fotone provengano dal decadimento di due muoni diversi genera una dipendenza quadratica dal flusso di particelle (nota 3,

¹ Il *running time*.

² Ricordiamo, infatti, che per una distribuzione gaussiana, il taglio al 90 % equivale a tenere gli eventi che sono compresi in un'ampiezza, circa, 1.4 *FWHM* della distribuzione.

³ Nel § 2.3 di pag. 32 abbiamo visto che $N_{\text{acc}} \propto N_{\text{acc}}^e N_{\text{acc}}^\gamma \sim R_\mu^2 T$.

Tabella 3.1: Principali caratteristiche del canale $\pi E5$

accettanza angolare	150 msr
range di impulso	10–20 MeV/c
lunghezza	10.4 m
banda di impulso (FWHM)	10 %
risoluzione d'impulso (FWHM)	2 %
emittanza orizzontale	15.3 cm rad
emittanza verticale	3.6 cm rad
dimensione dello <i>spot</i>	$4 \times 4 \text{ cm}^2$

pag. 44). Al contrario, sia nel decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ sia nel fondo radiativo, i prodotti di decadimento provengono da un solo muone, ciò genera una dipendenza lineare dal flusso R_μ . Ecco perché l'utilizzo di fasci continui è preferibile rispetto a quelli impulsati. Da qui la scelta naturale di realizzare l'esperimento presso il PSI.

In questo laboratorio funziona un anello di ciclotrone che accelera protoni fino ad un'energia di 590 MeV. Il fascio ottenuto viene fatto incidere su due bersagli di carbonio per la produzione di due distinti canali di mesoni. I due bersagli sono posti in sequenza ed hanno spessori differenti: quello più sottile (7 mm) è chiamato *M-target* mentre quello più spesso (da 40 mm o 60 mm) è chiamato *E-target*. Entrambi hanno una forma geometrica tronco-conica e sono fatti di un blocco omogeneo di grafite. La loro collocazione lungo la linea del fascio di protoni è tale che questi ne urtano la superficie uniformemente. Nell'urto i protoni producono prevalentemente pioni i quali, decadendo in volo o nei bersagli stessi, producono muoni ed elettroni.

Dai due bersagli si dipartono *sette* linee di fascio che assumono nomi diversi a seconda del target che le ha generate. Nel caso dell'esperimento qui discusso, dalla linea denominata $\pi E5$ vengono estratti fasci di pioni e muoni ad un angolo di 175° rispetto alla direzione iniziale dei protoni. La tabella 3.1 elenca le principali caratteristiche della linea $\pi E5$.

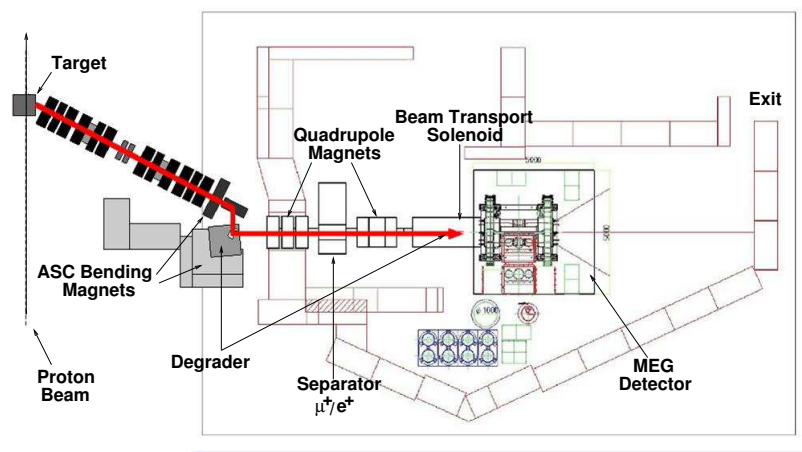
Il fascio $\pi E5$ può essere *aggiustato* (*tuned*) in modo da estrarre i muoni di *superficie* (a cui si è accennato già nel § 2.5 di pagina 36).⁴ Quando i pioni decadono a riposo nel bersaglio, i muoni così generati hanno energia cinetica di 4 MeV, corrispondente ad un impulso di 29 MeV/c circa. Data la modesta energia, i muoni riescono ad uscire dal bersaglio solo se i pioni decadono in prossimità della superficie di questo, altrimenti rimangono intrappolati. In questo modo è possibile avere un fascio di muoni a basso impulso e ben definito.

Il vantaggio di utilizzare, nel nostro esperimento, muoni con energia così bassa sta nel fatto che essi possono essere fermati in un bersaglio sottile. Di conseguenza, il positrone generato dal loro decadimento subisce gli effetti minimi del multiplo scattering.⁵

Il fascio $\pi E5$ così prodotto, è inizialmente contaminato dalla presenza dei positroni, in un numero che è quasi dieci volte superiore a quello dei muoni. Ciò è causato dal fatto che i muoni rimasti intrappolati nel target *E* decadono dando vita a positroni di varia energia; per di più, un'altra sorgente

⁴ Un approfondimento si può trovare negli articoli [Pifer *et al.*, 1976; Reist *et al.*, 1978].

⁵ Infatti, come si ricorderà (§ 2.5, pag. 36), questo è stato uno degli inconvenienti maggiori negli esperimenti del passato.

Figura 3.2: L'area $\pi E5$

è costituita dalla conversione in coppie di γ provenienti dal decadimento di π^0 .

Questa contaminazione di e^+ deve essere, naturalmente, eliminata o per lo più ridotta, perché se i positroni raggiungessero il rivelatore MEG, potrebbero causare effetti indesiderati nelle camere oppure, fermandosi nella sala sperimentale, contribuirebbero ad un fondo di radiazione da annichilazione e ciò abbasserebbe l'efficienza di tutto l'apparato.

Così, per poter utilizzare al meglio il canale $\pi E5$, è necessario manipolarlo prima che giunga al bersaglio posto al centro del rivelatore. A questo scopo sono stati fatti tutta una serie di studi basati su simulazioni dell'ottica dei fasci⁶ e le conclusioni sono state quelle di inserire tra la fine della linea del fascio e l'apparato i seguenti elementi:

- un tripletto di quadrupoli che rifoceggiano il fascio dopo l'azione del magnete di curvatura ASC;
- un selettore di velocità (*filtro di Wien*) che separa spazialmente i muoni dagli elettroni e positroni;
- un altro tripletto di quadrupoli, sempre con azione di rifoceggiamento, per i muoni dopo la separazione;
- un solenoide di trasporto, BTS, per accoppiare il fascio in uscita dai quadrupoli con il rivelatore MEG; nel suo punto focale intermedio, contiene un ulteriore *degrader* per ridurre l'energia dei muoni.

Il risultato (per una corrente iniziale di protoni di 1.8 mA) è un fascio di circa $10^8 \mu^+/s$, debolmente contaminato da positroni ($e^+/\mu^+ \approx 10^{-7}$). Il fascio presenta una sezione ellittica (*spot*) con profili gaussiani aventi $\sigma_x \approx 5.5 \text{ mm}$ e $\sigma_y \approx 6.5 \text{ mm}$. Questi profili, però, si *allargano* fino ad arrivare a $\sigma \sim 10 \text{ mm}$, quando il fascio attraversa l'atmosfera di elio che circonda il bersaglio. La figura 3.2 mostra una rappresentazione schematica di tutta l'area dell'esperimento MEG.

3.2.2 Il bersaglio

Abbiamo visto come una delle richieste cruciali in questi esperimenti sul decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ è che il bersaglio, per fermare i muoni, sia il più

⁶ Sono stati utilizzati i programmi TRANSPORT e TURTLE [Brown *et al.*, 1973; Brown e Iselin, 1974].

sottile possibile così da ridurre gli effetti del multiplo scattering sul moto del positrone.

La strategia adottata è stata quella di suddividere il materiale complessivo per fermare i muoni, tra l'ultimo *degrader*, posto nel punto focale intermedio del [BTS](#), e il bersaglio.

Per arrivare alla soluzione definitiva sono stati analizzati diversi materiali, come il *mylar* ($C_5H_4O_2$)_n, il *polietilene* (CH₂)_n e il *kapton* (C₂₂H₁₀N₂O₅)_n. Tenendo conto del potere frenante e della lunghezza di radiazione di ciascuno di essi, il miglior risultato, dal punto di vista della soppressione dei fondi e della qualità del fascio, si è ottenuto con il polietilene.

In questo materiale i muoni di *superficie* hanno un percorso medio di 1100 μm; i test eseguiti hanno mostrato che con uno spessore di 150 μm ne occorrono circa 700 μm nel *degrader* del [BTS](#). Se consideriamo che il bersaglio è posizionato al centro del rivelatore ed è inclinato di 22° rispetto alla linea del fascio,⁷ il percorso effettivo dei muoni è di soli 400 μm.

La possibilità di poter utilizzare un bersaglio di dimensioni ridotte permette di ridurre la perdita di energia che il positrone subisce dopo essere stato creato. Nel polietilene con uno spessore di 150 μm, questa è di soli 30 keV.

3.3 IL RIVELATORE PER I POSITRONI

Lo spettrometro per i positroni è costituito da tre elementi principali: un magnete superconduttore appositamente progettato per produrre un campo *a gradiente*; un sistema di camere a deriva (*drift*) per misurare l'impulso del positrone e ricostruirne la traccia; un sistema di contatori a scintillazione ([TC](#)), per misurare il tempo di volo dei positroni. La caratteristica peculiare dello spettrometro è che il campo magnetico utilizzato *non* è solenoidale e questo per delle ragioni ben precise.

Il campo magnetico solenoidale ha il grande merito di confinare le tracce a basso impulso, soprattutto quelle che hanno il raggio di curvatura al di sotto di un certo valore. In questo modo la gran parte dei positroni di Michel non raggiunge il sistema di tracciamento che è posizionato ad una distanza radiale maggiore. Quando, però, i positroni vengono emessi in direzione quasi ortogonale al campo, la traccia (che è un elica con passo molto stretto) può compiere molti giri nelle camere (fig. [3.3a](#)). Questo, oltre a causare problemi nella ricostruzione della traccia, può determinare delle instabilità nel funzionamento delle camere stesse. Con i campi uniformi, inoltre, la proiezione sul piano trasverso del raggio di curvatura della traiettoria dipende, a parità di quantità di moto assoluta, dall'angolo di emissione del positrone (cioè dalla componente trasversa, p_T dell'impulso): ciò rende più complicata la selezione delle tracce in base alla loro energia (fig. [3.3b](#)).

Per poter evitare questi problemi, è stato scelto di adottare un campo magnetico non uniforme che presenta un gradiente lungo l'asse Z. L'intensità vale 1.26 T al centro del rivelatore ($z = 0$) ed è decrescente con il crescere di $|z|$. In un campo così fatto, l'elica ha un passo variabile che aumenta nella regione dove l'intensità è meno forte. I positroni, emessi quasi a 90° con la direzione del campo, sono spazzati via dal gradiente molto più rapidamente che non nel caso del campo solenoidale; essi compiono solo uno o due giri nelle camere. Questa situazione è illustrata nella figura [3.4a](#).

Il gradiente di campo può anche essere modellato in modo che i positroni, emergenti dal bersaglio, seguano delle traiettorie che abbiano la proiezione del raggio di curvatura sul piano trasverso, indipendente dall'angolo di

⁷ Cioè un rapporto di pendenza 1 : 2.5, circa.

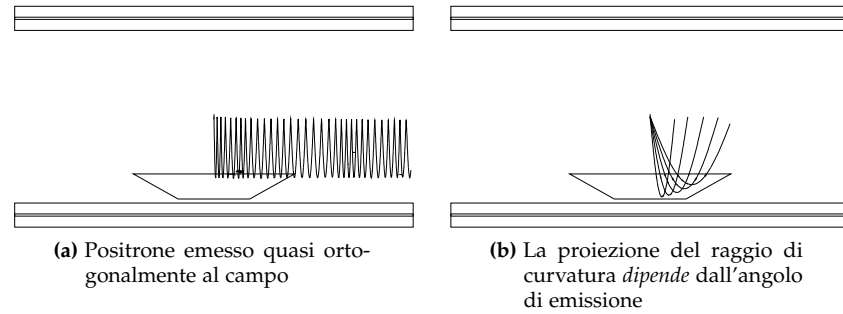


Figura 3.3: Problemi in un campo magnetico solenoidale

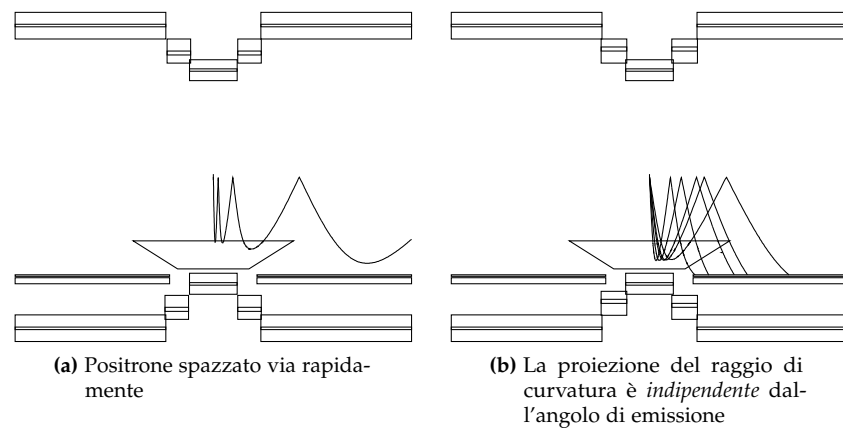


Figura 3.4: Vantaggi in un campo magnetico a gradiente

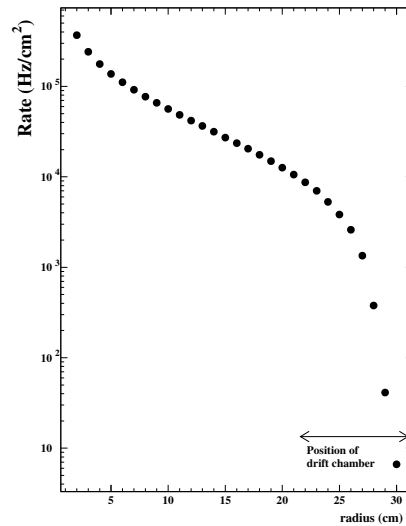


Figura 3.5: Flusso di positroni di Michel in funzione della distanza radiale

emissione.⁸ La figura 3.4b mostra un esempio di questo caso. Il fatto che la curvatura della traiettoria dipende solo dal valore assoluto dell'impulso, e non da p_T , rende più agevole selezionare le tracce che devono essere rivelate dalle camere. La figura 3.5 mostra il flusso di positroni di Michel in funzione della distanza radiale. Come si vede ad una distanza maggiore di 20 cm il numero di positroni che attraversano le camere diminuisce grandemente, rendendo, così, il loro funzionamento più stabile e rendendo più agevole la ricostruzione delle tracce.

Questa è la genesi del nome COnstant Bending RAdius spectrometer (COBRA) dato a questo magnete!

3.3.1 Il magnete superconduttore

Finora abbiamo visto la motivazione che richiede un campo non omogeneo nel rivelatore MEG. In quanto segue vogliamo descrivere come si può ottenere un campo con tale caratteristica.

Per poter realizzare un magnete con gradiente di campo, il metodo più semplice è quello di creare un profilo delle bobine con raggio variabile.⁹

Uno dei primi modelli studiati è stato quello di una struttura a *clessidra*, come mostrato nella figura 3.6a. Però un tale profilo, pur se concettualmente semplice, presenta dei problemi pratici per quanto riguarda la struttura di supporto. Un secondo profilo sviluppato, parte dal presupposto che nella regione occupata dal LXC, il flusso magnetico residuo sia il minimo possibile [Baldini *et al.*, 2000]. Infatti, per un corretto funzionamento, i fototubi del LXC non tollerano un campo residuo eccessivo. Il profilo risultante è mostrato nella figura 3.6b. Anche questo modello, pur essendo interessante dal punto di vista concettuale, all'atto pratico presenta problemi costruttivi ancora più gravi di quelli del profilo a cui si è accennato prima.

Siamo così giunti alla soluzione che è quella poi adottata per la costruzione del magnete. Il magnete COBRA è costituito di cinque gruppi di bobine superconduttrici, di tre raggi diversi: un gruppo di bobine centrali, due gruppi di bobine per generare il gradiente di campo e due gruppi di bobine

⁸ Almeno su un ampio intervallo di valori.

⁹ Naturalmente diamo per scontato una struttura a simmetria cilindrica.

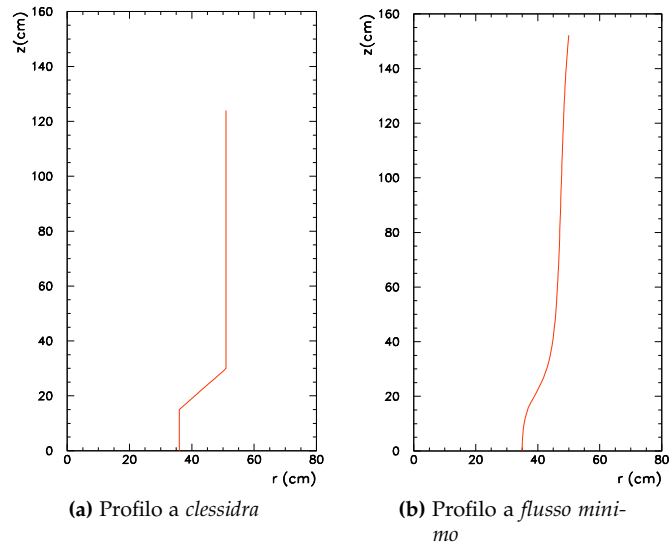


Figura 3.6: Alcuni profili preliminari delle bobine

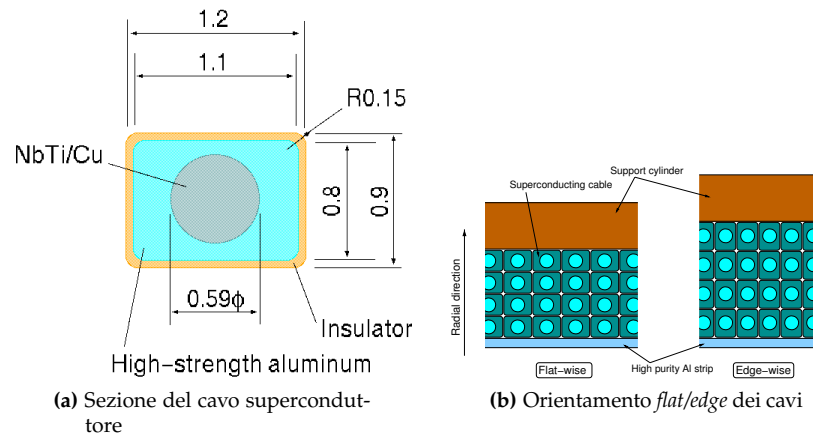


Figura 3.7: Particolari dei cavi superconduttori

lateralmente. Questa è nota come struttura a gradino ed è ben visibile nelle figure 3.1 e 3.9.

I cavi superconduttori hanno una struttura multifilamento, costituita da una lega Niobio-Titanio, immersa in una matrice di rame. Il tutto è confinato in un supporto rettangolare di alluminio (fig. 3.7a).

Per poter ottenere una densità di corrente differente nei vari gruppi di bobine, si è agito sia sul numero di strati degli avvolgimenti sia sull'orientamento dei cavi. Infatti, avendo una sezione rettangolare, questi possono essere posizionati sia in modo *flat-wise* che *edge-wise* (fig. 3.7b).

Il problema del campo magnetico residuo nella regione del LXC è stato risolto adottando due gruppi di bobine di *compensazione*, di tipo tradizionale, cioè resistivo (non superconduttore). Rispetto agli altri tipi di bobine, queste presentano un diametro decisamente più grande. Esse sono chiaramente visibili nella figura 3.8 della rappresentazione 3-D di tutto il rivelatore MEG. Il loro utilizzo porta l'intensità del campo magnetico nella regione del LXC, sotto i 50 G.

Una sintesi sulla geometria delle bobine è mostrata nella figura 3.9.

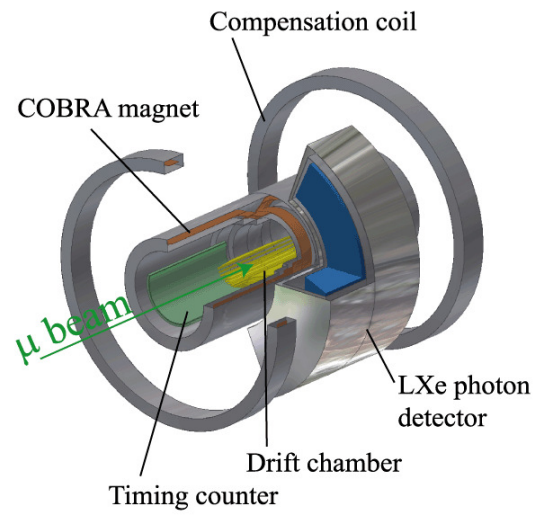


Figura 3.8: Vista schematica 3-D del rivelatore MEG

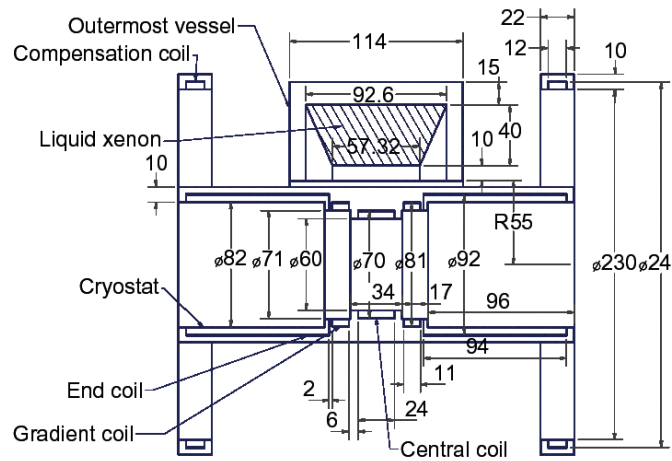


Figura 3.9: La geometria del COBRA

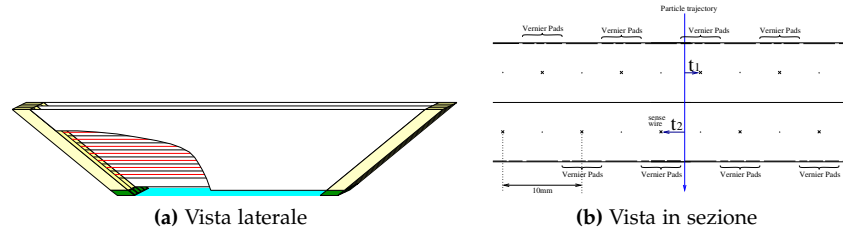


Figura 3.10: Settore di una camera a deriva

Naturalmente, le bobine hanno un supporto che deve essere il più possibile trasparente agli eventuali fotoni di 52.8 MeV che lo devono attraversare per poter essere rivelati dal calorimetro a xenon liquido. In prossimità del calorimetro, lo spessore totale equivalente è di 3.83 g/cm^2 e corrisponde a 0.197 lunghezze di radiazione. Con questi dati la probabilità che un fotone subisca una conversione è del 15 %, cioè 85 % della radiazione γ viene trasmessa senza subire interazioni importanti.

3.3.2 Il sistema delle camere a drift

La traccia del positrone è ricostruita per mezzo delle informazioni fornite dal sistema delle camere a deriva. Si tratta di un insieme di camere disposte radialmente ed intervallate di 10° . Ogni settore (fig. 3.10a) è costituito da due celle di deriva sfalsate opportunamente, come indicato nella figura 3.10b. Le camere hanno la forma trapezoidale e coprono un'area sensibile che nella direzione radiale va da 21.5 cm a 31.0 cm, mentre longitudinalmente la zona attiva si estende fino a $z = \pm 50 \text{ cm}$ alla distanza radiale più interna, e a $z = \pm 22 \text{ cm}$ a quella più esterna. Lo spessore del settore è 1.5 cm. Con una geometria così fatta, le camere dovrebbero rivelare le tracce dei positroni emessi con l'angolo polare, θ , ed azimutale, ϕ , tali che

$$|\cos \theta| < 0.35, \quad |\phi| < 60^\circ. \quad (1)$$

Le pareti delle camere sono fatte di fogli di plastica sui quali è depositato un sottile strato di alluminio, sagomato in modo da formare delle strisce catodiche a *Zig-Zag*, con periodo di 5 cm, chiamate *pannelli Vernier* (*Vernier pad*).

La configurazione a celle sfalsate permette di misurare simultaneamente sia la coordinata radiale che il tempo assoluto della traccia. La differenza, $t_1 - t_2$, dei tempi di *drift* in due celle adiacenti fornisce la coordinata radiale, r , con un'accuratezza di circa $200 \mu\text{m}$ mentre la media, $(t_1 + t_2)/2$, da una misura del tempo assoluto della traccia con un'accuratezza di 5 ns: questa risoluzione temporale è cruciale per un'accurata ricostruzione della traccia. Il rapporto tra le quantità di carica elettrica raccolte alle estremità del filo sensibile consente, invece, di avere un'informazione della coordinata z , con l'accuratezza di circa un 1 cm. Poiché, però, la quantità di carica positiva indotta su ciascun pannello Vernier è in relazione alla coordinata z (a causa della forma a *Zig-Zag*), il rapporto tra le cariche indotte su ciascun pannello fornisce la coordinata z con l'accuratezza di $300\text{--}500 \mu\text{m}$ [Allison *et al.*, 1991]. La figura 3.11 mostra una rappresentazione sintetica del metodo dei pannelli Vernier.

Il volume di ciascun settore della camera è riempito con una miscela di 50 % di elio (He) e 50 % di etano (C_2H_6), alla pressione di 1 atm. L'elio è

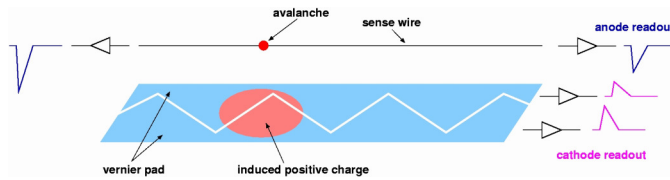


Figura 3.11: Vista schematica del metodo dei pannelli Vernier

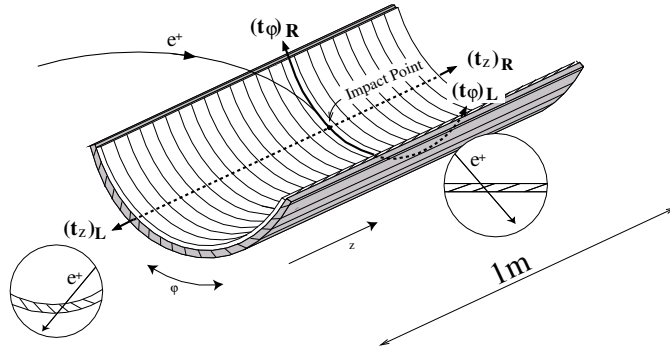


Figura 3.12: Schema di principio dei TC

stato scelto per minimizzare il multiplo scattering che la traccia subisce. Non dobbiamo dimenticare, infatti, che il multiplo scattering è uno dei principali processi che limita la risoluzione angolare e dell'impulso. L'etano, invece, permette di avere sufficiente ionizzazione.

3.3.3 Il sistema dei Timing Counter

Il sistema dei TC è un insieme di scintillatori plastici, posizionati simmetricamente su entrambi i lati dello spettrometro magnetico (fig. 3.1). Lo scopo è quello di misurare il tempo di volo dei positroni e di fornire un segnale apposito per selezionare gli eventi in cui il positrone, tracciato dalle camere, è rivelato in coincidenza e collineare con il fotone identificato dal calorimetro.

La figura 3.12 mostra lo schema di principio del sistema dei TC. Consiste in due strati di barrette di scintillatore, posti ortogonalmente lungo la direzione in ϕ e in z . La posizione dello strato esterno è compresa tra 25 cm e 105 cm, sia *upstream* ($z < 0$) che *downstream* ($z > 0$). Lo strato interno, invece, copre una regione azimutale ϕ di circa 156° ($219^\circ < \phi < 375^\circ$). Tutta la struttura si trova ad una distanza radiale di circa 32 cm. I positroni emessi nell'intervallo angolare $|\cos \theta| < 0.35$ urtano il sistema dei TC dopo che la loro traccia ha compiuto circa 1.5 giri.

Le barrette esterne hanno alle loro estremità i tubi fotomoltiplicatori che misurano sia l'altezza dell'impulso di luce che il tempo d'arrivo di questo. Lo strato interno, quello incurvato, è costituito da fibre scintillanti lette da fotodiodi Avalanche Photo-Diode (APD). Il progetto iniziale prevedeva delle barrette incurvate di scintillatore, lette ugualmente da fototubi, anche per lo strato interno. Quest'idea, però, è stata abbandonata perché i fotomoltiplicatori si sarebbero venuti a trovare in una regione in cui l'intensità del campo magnetico sarebbe stata eccessiva per un loro corretto funzionamento. In questo caso, la soluzione adottata è stata quella di sostituire le barrette con le fibre scintillanti.

I fototubi hanno una durata limitata in atmosfera di elio. Per questo motivo (fig. 3.13) tutto il sistema dei TC è separato dalla regione delle camere da due

strati di pellicole (*bag*) sulla cui superficie è stato depositato un sottile strato di metallo. Sia lo spazio tra le pellicole che la regione dei TC sono riempiti di azoto (N_2) gassoso. Con questo accorgimento, l'esperienza dimostra che la vita media dei fototubi è decisamente più lunga.

Come mostra la figura 3.12, quando il positrone impatta degli scintillatori, i fototubi, o i fotodiodi, registrano i tempi di arrivo, t_R e t_L degli impulsi di luce. La differenza, $t_R - t_L$, fornisce l'informazione sul punto d'impatto lungo il materiale scintillante, mentre la media, $(t_R + t_L)/2$, ne misura il tempo assoluto. Per lo strato interno, queste informazioni vengono utilizzate soprattutto per una selezione preliminare degli eventi. Tutto l'apparato dei TC è progettato per ottenere una risoluzione di 105 ps (FWHM) sul tempo di volo dei positroni.

3.4 IL RIVELATORE DEI FOTONI

La misura accurata dell'energia, del tempo di volo e della direzione del fotone è uno degli ingredienti fondamentali per la riuscita dell'esperimento MEG. La misura di queste grandezze è affidata al calorimetro a xenon liquido. Come si vede dalla figura 3.14, si tratta di un recipiente a forma di C, posizionato in modo contiguo all'esterno del magnete, con la sua facciata più interna ad una distanza di 65 cm dalla targhetta e con una profondità di 47 cm. La sua geometria è tale da coprire un angolo solido complessivo del 12 % ($\Omega/4\pi$), corrispondente ad eventi cinematici con $|\cos \theta| < 0.35$ e $|\phi| < 60^\circ$.

Il volume del rivelatore è riempito con circa 800 litri di xenon liquido, alla temperatura di 165 K. Tutte le sue pareti interne sono ricoperte da 850 tubi fotomoltiplicatori. La particolare forma a C dovrebbe permettere ai fotoni di urtare la facciata interna del rivelatore quasi ortogonalmente.

La scelta di utilizzare lo xenon liquido è motivata dal fatto che questo materiale, oltre ad avere una lunghezza di radiazione corta che permette di avere un rivelatore di dimensioni limitate, ha anche un elevato flusso di luce scintillante, paragonabile a quella dei cristalli di NaI, e i tempi di risposta sono particolarmente veloci. Questi ultimi, in particolare, sono l'elemento essenziale per poter ridurre il problema della sovrapposizione accidentale (*pile-up*) di fotoni dovuti ad un elevato flusso di fondi.

Un altro motivo a favore dello xenon liquido è che esso non è affetto dai problemi di non uniformità che invece limita la risoluzione dei cristalli. La tabella 3.2 riporta i dati principali sullo xenon liquido.

Il LXC funziona essenzialmente come un dispositivo a scintillazione, cioè si raccoglie solo la luce prodotta e non la ionizzazione. La luce emessa ha

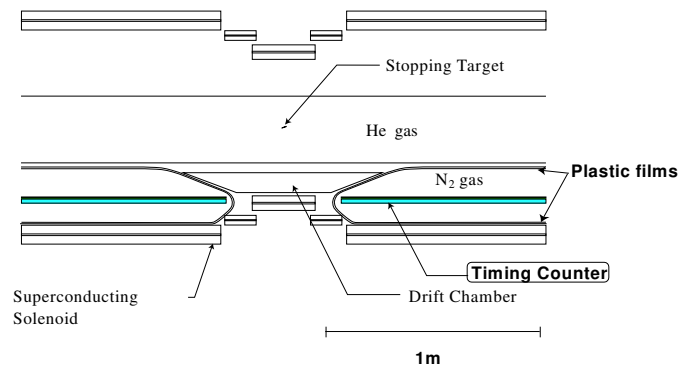


Figura 3.13: Disposizione dei TC nel magnete COBRA

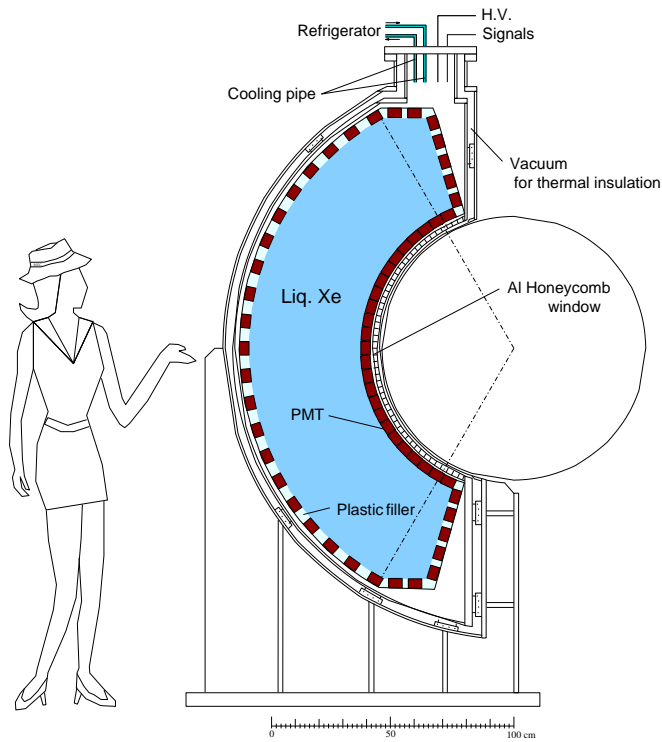


Figura 3.14: Il rivelatore di fotoni a Xenon liquido

Tabella 3.2: Principali parametri dello Xenon liquido

Densità	2.95 g/cm^3
Punto di ebollizione e di fusione	167.1 K, 161 K
Energia per fotone di scintillazione	24 eV
Lunghezza di radiazione	2.77 cm
Tempo di decadimento (ricombinazione)	45 ns
Tempo di decadimento (componente veloce)	4.2 ns
Tempo di decadimento (componente lenta)	22 ns
Picco di emissione (λ)	178 nm
Lunghezza di assorbimento	$> 100 \text{ cm}$
Lunghezza di diffusione Rayleigh	$\sim 40 \text{ cm}$
Indice di rifrazione	1.56

il picco nell'ultravioletto, Vacuum Ultra Violet (VUV), a 178 nm di lunghezza d'onda e viene generata dalle transizioni radiative degli atomi di xenon, eccitati dalle radiazioni ionizzanti degli sciami elettromagnetici (innescati dalla conversione del γ).

La principale limitazione che si ha nell'uso dello xenon liquido è la sua trasparenza alla luce che deve essere raccolta dai fototubi, e ciò si verifica soprattutto se contiene delle impurità, come molecole di acqua (H_2O) ed ossigeno (O_2). Infatti, come noto, la radiazione luminosa nell'attraversare un mezzo subisce sia fenomeni di assorbimento vero e proprio sia processi di diffusione elastica (*scattering Rayleigh*), per cui vede attenuata la sua intensità di circa $1/3$ ($1/e$) su una distanza pari a quella che è chiamata *lunghezza di attenuazione*, λ_{att} .¹⁰ Alcuni test preliminari eseguiti con un prototipo di circa 100 litri, si è visto che purificando lo xenon dalle impurità, la lunghezza di attenuazione passava da 10 cm a più di 100 cm. Questo ha fatto comprendere che, per un corretto funzionamento, il calorimetro deve avere un impianto di purificazione il quale deve essere costantemente monitorato.

Il punto d'impatto del γ viene ricostruito in due tempi: prima si determina la posizione del picco di luce corrispondente al segnale di un fototubo della faccia frontale del calorimetro, successivamente si analizzano i segnali dei fototubi limitrofi. Ciò dovrebbe portare a ricostruire il punto d'impatto con una risoluzione di 5 mm, corrispondente ad una risoluzione angolare, sulla direzione di volo, di circa 6 mrad. Nel caso che il punto di conversione del fotone di trovi entro 1 cm dalla faccia d'ingresso, allora la risoluzione angolare potrebbe scendere a 10 mrad.

Per quanto riguarda il tempo di volo, si stima una risoluzione (FWHM) di 100 ps. L'energia, invece, è misurata dalla somma di tutti i segnali dei fotomoltiplicatori. Qui la risoluzione stimata è di circa 1.4 % per un fotone di 52.8 MeV. Il caso che il γ converta prematuramente, prima che il lampo di luce possa essere raccolto adeguatamente dai fototubi, si ripercuote sull'efficienza di rivelazione piuttosto che in una risoluzione peggiore. Infatti solo i fotoni sopra una certa soglia (40 MeV) sono accettati.

3.5 IL SISTEMA DI ACQUISIZIONE DATI

Il sistema di acquisizione dati dell'esperimento MEG si basa sulla rapida digitalizzazione (ad una frequenza di campionamento di 100 MHz) dei segnali forniti dai fototubi del LXC e dalle fibre scintillanti dei TC. In una prima selezione degli eventi non si possono usare le informazioni delle camere a *drift*: i tempi di deriva sono troppo lunghi per una selezione veloce degli eventi utili.

Si stima che, con un flusso di muoni $R_\mu \approx 10^8 \mu^+/s$, quello dei γ , con $E_\gamma > 45$ MeV (compreso il flusso dei fotoni di background), nel LXC è $R_\gamma \approx 2$ kHz.

Per quanto riguarda i positroni che urtano i TC, bisogna tener presente che già la posizione radiale di questi esclude molti positroni di Michel di energia più bassa (come abbiamo visto con la figura 3.5). Il flusso stimato qui è $R_{TC} \approx 2$ MHz. La struttura segmentata dei TC introduce un ulteriore fattore $f_\phi \approx 5$ di rigetto dei positroni non correlati (back to back) con i fotoni nel calorimetro.

¹⁰ Con λ_{att} teniamo conto sia dell'assorbimento che della diffusione Rayleigh.

Assumendo una finestra temporale di $\Delta t \approx \pm 10 \text{ ns}$ per la coincidenza tra [LXC](#) e [TC](#), il flusso di eventi di fondo non correlati è stimata in

$$R = 2\Delta t \cdot R_\gamma \cdot \frac{R_{TC}}{f_\phi} \cdot \left(\frac{R_\mu}{10^8 \mu^+/\text{s}} \right)^2 \approx 20 \text{ Hz}$$

Fortunatamente questo flusso è piuttosto basso rispetto alle capacità tecnologiche attuali dei sistemi di acquisizione dati. Questo fatto dà anche un margine nel caso che nella precedente stima non si sia tenuto conto di altri processi di fondo (come fotoni provenienti dai dispositivi di schermaggio dell'esperimento).

Per la memorizzazione e l'acquisizione dati, il software utilizzato è il sistema denominato Maximum Integration Data Acquisition System ([MIDAS](#)) [[Ritt, 2001](#)], che è stato usato con successo dagli esperimenti precedenti e che è lo standard del [PSI](#).

Il flusso di dati acquisiti dipende dalla capacità di selezione degli eventi e da quella di compressione della forma d'onda dei segnali generati dai rivelatori. Qui la stima è di circa 100 MiB s^{-1} .

Parte III

LA SIMULAZIONE

Abbiamo visto che la programmazione è un'arte, perché richiede conoscenza, applicazione, abilità e ingegno, ma soprattutto per la bellezza degli oggetti che produce.

DONALD E. KNUTH

4.1 SCHEMA GENERALE DELLA SIMULAZIONE

La simulazione ha avuto principalmente lo scopo di studiare le risoluzioni angolari, spaziali e dell'impulso del positrone nonché di ottimizzare la configurazione dei TC. A questo scopo sono stati sviluppati due programmi.

- Il Monte Carlo (MC), che è la simulazione vera e propria dello spettrometro magnetico. Questo programma simula il passaggio del positrone attraverso tutto l'apparato tenendo conto di tutti gli effetti fisici (quali, ad esempio, il *multiplo scattering* dovuto ai diversi materiali attraversati). I risultati che fornisce sono soprattutto gli *hit* della traccia con le camere e i TC. Il suo sviluppo è stato realizzato con il pacchetto software GEANT 3.21 [Goossens, 1994].
- Il programma di Ricostruzione (RC). A partire dai dati forniti dal MC, con opportune tecniche di *fit*, questo programma, cerca di ricostruire le principali grandezze fisiche inerenti il positrone, quali impulso e coordinate del punto di decadimento del muone da cui origina la traccia del positrone. Alla base del programma sta la libreria di minimizzazione MINUIT [James, 1998].

Entrambi i programmi necessitano di tracciare la traiettoria del positrone attraverso il campo magnetico prodotto dallo spettrometro, per cui hanno bisogno della mappa del campo nella regione occupata dal volume del rivelatore. A questo scopo è stato realizzato un programma apposito che, pur rimanendo nell'ambito della struttura a simmetria cilindrica del magnete, consente lo studio di diverse configurazioni geometriche dello spettrometro: forma a *clessidra*, a *gradino* con o senza bobine di compensazione (a queste *geometrie* abbiamo fatto cenno nel § 3.3.1 di pagina 49).

Nel seguito daremo un cenno al calcolo delle mappe del campo e descriveremo con più particolari il Monte Carlo e il programma di Ricostruzione.

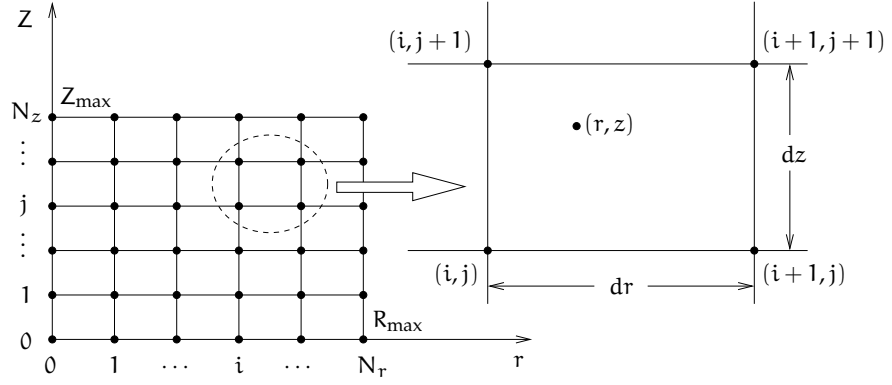


Figura 4.1: Reticolo per il calcolo della mappa del campo magnetico

4.2 IL CALCOLO DELLE MAPPE DEL CAMPO

Il campo magnetico prodotto dallo spettrometro in un qualunque punto $P(x, y, z)$ dello spazio è dato dalle seguenti espressioni

$$\left. \begin{aligned} B_r(r, z) &= \frac{B_0}{\pi H_0^{(N)}} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{Q_j} (z - \zeta_j) \left[-K(k_j) + \frac{P_j^{(+)}}{P_j^{(0)}} E(k_j) \right] \\ B_z(r, z) &= \frac{B_0}{\pi H_0^{(N)}} \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{Q_j} \left[K(k_j) + \frac{P_j^{(-)}}{P_j^{(0)}} E(k_j) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Un cenno sul metodo che permette di ricavarle è dato nell'appendice A, alla quale si rimanda anche per le notazioni complete. Qui ci basti ricordare che $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, I_j , $j = 1, \dots, N$, sono le correnti, B_0 è l'intensità del campo al centro del magnete, $K(k)$ e $E(k)$ sono, rispettivamente, gli integrali ellittici completi di 1^a e 2^a specie nella forma normale di Legendre.

Per poter tracciare la traiettoria del positrone attraverso l'apparato sarebbe necessario applicare le formule (2) in ogni punto della traccia che, normalmente, è suddivisa in piccoli passi Δs (steps). Tenendo conto che nel magnete il numero di spire, N , è dell'ordine di $\sim 10^2$, che $\Delta s \sim 1$ mm e che $K(k)$, $E(k)$ vanno calcolati numericamente, l'applicazione diretta delle (2) è quasi proibitiva per il tempo di calcolo.

La cosa più appropriata da fare è quella di calcolare il campo nei nodi di una regione reticolare, determinandone, poi, i valori in un punto qualunque dello spazio, per interpolazione.

Poiché lo spettrometro gode della simmetria speculare sia nella geometria che nelle correnti che lo attraversano, $I(z) = I(-z)$, non è difficile verificare che le equazioni (2) danno

$$\left. \begin{aligned} B_r(r, z) &= -B_r(r, -z) \\ B_z(r, z) &= B_z(r, -z), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

per cui, è sufficiente calcolare il campo in una regione $z \geq 0$; la simmetria cilindrica, inoltre, permette di considerare una griglia bidimensionale $r - z$ al posto di una tridimensionale (fig. 4.1).

La regione è suddivisa in un insieme di maglie, $N_r \times N_z$, che formano un reticolo di $(N_r + 1) \times (N_z + 1)$ nodi; ciascuna maglia ha dimensioni $dr \times dz$, per cui le dimensioni complessive della regione sono $R_{\max} \times Z_{\max}$

con $R_{\max} = N_r dr$ e $Z_{\max} = N_z dz$. Se indichiamo il valore del campo nei nodi con

$$\begin{aligned} B_{r(i,j)} &\equiv B_r(i \cdot dr, j \cdot dz) \\ B_{z(i,j)} &\equiv B_z(i \cdot dr, j \cdot dz) \\ i &= 0, \dots, N_r, j = 0, \dots, N_z, \end{aligned} \quad (4)$$

in cui i secondi membri sono calcolati con le (2), il valore del campo in un punto $P(x, y, z)$ dello spazio può essere determinato per *interpolazione bilineare* [Press et al., 1992]

$$\begin{aligned} B_r(r, z) &= (1-t)(1-u)B_{r(i,j)} + t(1-u)B_{r(i+1,j)} \\ &\quad + tuB_{r(i+1,j+1)} + (1-t)uB_{r(i,j+1)}, \\ B_z(r, z) &= (1-t)(1-u)B_{z(i,j)} + t(1-u)B_{z(i+1,j)} \\ &\quad + tuB_{z(i+1,j+1)} + (1-t)uB_{z(i,j+1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

In queste formule, la coppia (i, j) , con $i = [r/dr]$ e $j = [z/dz]$,¹ individua la maglia della griglia in cui cadono le coordinate (r, z) di P (fig. 4.1); (t, u) sono le coordinate di P riferite alla maglia, cioè

$$t = \frac{r - i \cdot dr}{dr}, \quad u = \frac{z - j \cdot dz}{dz}.$$

Naturalmente, sia t che u hanno i valori compresi tra 0 e 1.

Le figure 4.2 e 4.3 mostrano un esempio dei risultati ottenuti nel calcolo delle mappe del campo magnetico. In particolare, nella figura 4.3 osserviamo la forte *depressione* visibile nella regione del LXC (l'effetto delle bobine di compensazione accennato al § 3.3.1 di pagina 49).

4.3 LE APPLICAZIONI BASATE SU GEANT

Il nostro MC è un programma scritto in FORTRAN fondato sul pacchetto software GEANT. Prima di passare a descriverne i dettagli è utile una breve introduzione a questa libreria.

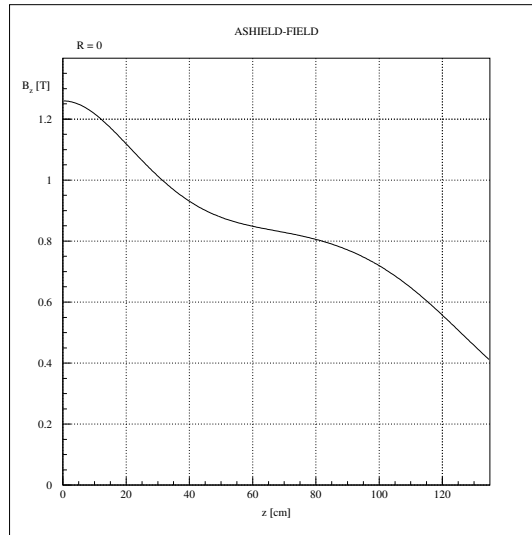
GEANT, ossia GEometry AND Tracking, è un sistema per la descrizione dei rivelatori e un insieme di strumenti di simulazione che aiutano i fisici in questi studi. Con esso è possibile simulare il passaggio delle particelle elementari attraverso la materia. Storicamente è stato sviluppato per gli esperimenti di Fisica delle Alte Energie, High Energy Physics (HEP). Successivamente ha trovato applicazione in altri campi quali le scienze mediche e biologiche, le ricerche sulla radioprotezione e l'astronautica.

Nella fisica delle alte energie le applicazioni principali sono:

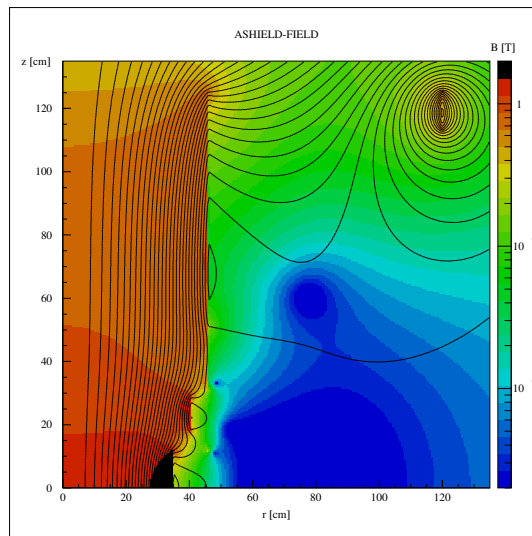
- il *trasporto*, o meglio, il *tracking* (nel gergo di GEANT), delle particelle attraverso tutto l'apparato sperimentale al fine di simulare la risposta del rivelatore;
- la rappresentazione grafica dell'apparato e delle traiettorie delle particelle attraverso di esso.

Esiste una versione interattiva di GEANT che permette di combinare insieme queste funzioni. Ciò è particolarmente utile, poiché osservare quello che

¹ Con $[x]$ indichiamo la parte intera di x .



(a) Campo magnetico sulla linea del fascio



(b) Campo magnetico e linee di flusso

Figura 4.2: Mappe del campo magnetico

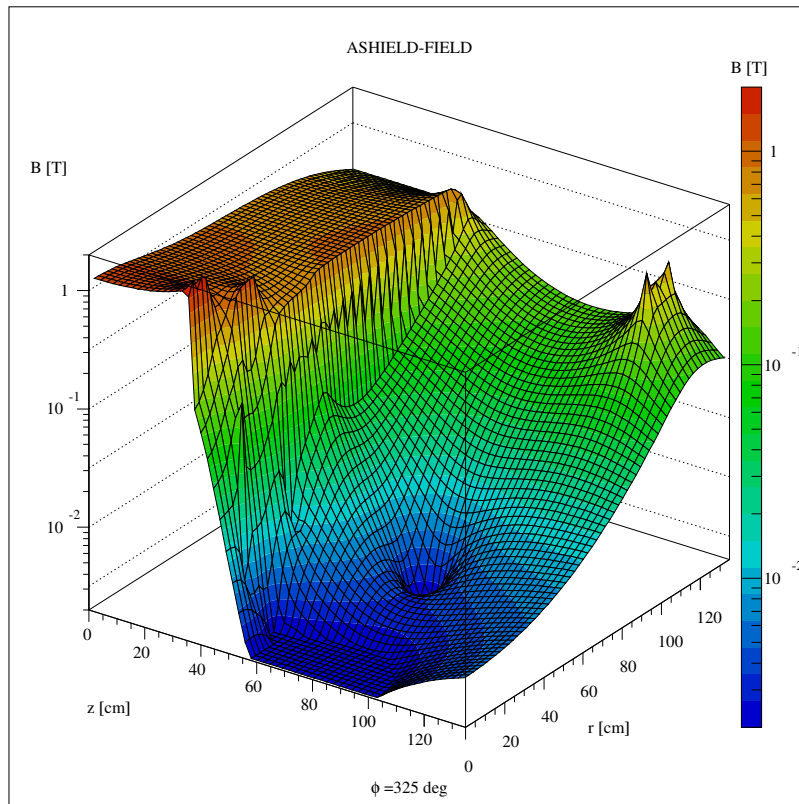


Figura 4.3: Mappa 3-D del campo magnetico

accade ad una particella dentro il rivelatore rende più semplice scoprire difetti dell'apparato e (qualche volta) del programma!

In vista di tali applicazioni, il compito dell'utente è quello di:

- descrivere l'apparato dell'esperimento con una struttura di volumi geometrici; ad ogni volume viene assegnato un *tracking medium* che identifica il materiale con cui il volume è *riempito* ed alcuni parametri necessari per il *tracking*;
- accettare gli eventi simulati con i generatori di Monte Carlo;
- trasportare le particelle attraverso tutte le varie parti del rivelatore tenendo conto dei contorni geometrici dei volumi e degli effetti fisici compatibili con la natura delle particelle come, ad esempio, le loro interazioni con la materia e il campo magnetico;
- salvare le traiettorie delle particelle e le risposte delle parti sensibili dell'apparato;
- visualizzare il rivelatore e le traiettorie delle particelle.

La libreria contiene delle routine *dummy* e di *default* che l'utente deve definire quando si devono compiere azioni dipendenti dalla propria applicazione. Infatti sta all'utente:

- codificare le routine necessarie che forniscono i dati per la descrizione dell'apparato sperimentale;
- assemblare le varie parti del programma e delle *utility* in un unico programma eseguibile;

- comporre le strutture dati appropriate per controllare l'esecuzione del programma.

Le routine che l'utente può o deve definire iniziano per GU (GUFLD, GUSTEP...) e UG (UGINIT, UGEOM...).

Se l'applicazione non è di tipo interattivo allora l'utente deve fornire anche il programma principale dell'applicazione (il *main*). Questo ha una struttura piuttosto standard: dopo aver allocato la memoria necessaria all'applicazione, passa il controllo a tre fasi distinte dell'esecuzione in ognuna delle quali l'utente può aggiungere le proprie routine: inizializzazione, elaborazione dell'evento e conclusione.

Nel seguito descriveremo le prime due poiché la fase conclusiva dell'applicazione (normalmente sotto il controllo dell'utente) consiste principalmente nella chiusura di eventuali file aperti (quelli utilizzati, ad esempio, per la memorizzazione delle informazioni statistiche) e del sistema grafico, qualora l'applicazione l'abbia richiesto.

4.3.1 Inizializzazione

L'inizializzazione è controllata dall'utente con una routine che, per consuetudine, è chiamata UGINIT. In essa si devono chiamare quei sottoprogrammi di libreria che, oltre a riservare la memoria necessaria, si occupano prevalentemente di:

- creare ed inizializzare le aree di memoria visibili globalmente (COMMON) ai valori di default;
- leggere i dati in ingresso che modificano opzioni di default o forniscono informazioni per l'esecuzione corrente dell'applicazione;
- inizializzare il sistema grafico (se l'applicazione lo richiede);
- riempire la struttura dati con le caratteristiche dei materiali;
- riempire la struttura dati con le proprietà delle particelle;
- calcolare le tabelle relative a sezioni d'urto, perdita di energia e così via, per vari processi, in modo che queste informazioni, dopo essere state archiviate in apposite strutture dati, possano essere utilizzate durante il tracciamento delle particelle.

Inoltre l'utente vi *deve* aggiungere il proprio codice (UGEOM) per:

- definire, attraverso l'introduzione di un insieme di volumi, la geometria delle varie parti dell'apparato;
- definire i parametri dei materiali in cui si ha il tracciamento (*tracking*) delle particelle;
- specificare quali componenti di questa struttura geometrica devono essere considerati *sensibili*, dando una *risposta* quando sono *colpiti* (*hit*) dalle particelle.

Questa fase, normalmente, si chiude con l'inizializzazione (*booking*) delle strutture dati per la raccolta delle informazioni statistiche (UHINIT).

4.3.2 Elaborazione dell'evento

La fase di elaborazione è attivata con la chiamata della routine di [GEANT](#), `GRUN`, le cui azioni principali per ogni evento sono:

- generare o leggere la cinematica dell'evento (ad esempio, vertice ed impulso iniziali per ciascuna particella che deve essere tracciata);
- trasportare, per ogni vertice, le particelle attraverso tutto l'apparato sperimentale definito in precedenza;
- controllare se la particella tracciata attraversa un elemento sensibile del rivelatore; in tal caso l'utente può memorizzare le informazioni utili nelle apposite strutture dati;
- verificare se durante il tracking della particella corrente si sono generate delle particelle secondarie; se nella sua applicazione l'utente ha deciso di tracciare anche i prodotti secondari, questi vengono elaborati prima che il controllo passi al trasporto della particella successiva: la struttura dati che memorizza le informazioni sulle particelle da tracciare è uno *stack*, Last Input First Output ([LIFO](#));
- simulare la risposta del rivelatore utilizzando tutte quelle informazioni memorizzate durante la fase di tracking;
- eseguire l'elaborazione di fine evento mettendo in uscita le informazioni più rilevanti.

Durante la fase di tracciamento vero e proprio, [GEANT](#) può simulare lo scattering multiplo, la perdita di energia per ionizzazione, le interazioni elettromagnetiche, quelle muoniche e così via. L'intervallo di energia per questi processi si estende da 10 keV fino a 10 TeV. L'utente ha la possibilità di decidere quali processi includere in un dato *run* della sua applicazione, così da poter valutare gli effetti sui risultati che ottiene. Altre operazioni che [GEANT](#) esegue in questa fase sono:

- simulare le interazioni adroniche utilizzando librerie specifiche, quali [GHEISHA](#) [[Fesefeldt, 1985](#)] e [FLUKA](#) [[Aarnio et al., 1987](#)], per la generazione di sciame adronici; per default [GEANT](#) usa la prima e permette all'utente decidere quale libreria usare con le routine `GUPHAD` e `GUHADR`;
- dare il controllo alla routine `GUSTEP` alla fine di ogni passo di tracciamento lungo la traiettoria; qui l'utente può compiere diverse azioni, come memorizzare un *hit* (se si è verificato) della particella con le parti sensibili del rivelatore o elaborare un evento secondario ecc.;
- chiamare la routine `GUSWIM` per il trasporto di particelle cariche in campo magnetico; pur essendo una *routine utente*, la sua implementazione di default in [GEANT](#) è sufficiente in molte situazioni; il campo magnetico, a meno che non sia costante (lungo l'asse Z), è descritto dalla routine `GUFLD`.

4.3.3 Sistemi di riferimento e volumi in GEANT

In generale l'apparato sperimentale è descritto per mezzo di un volume iniziale dentro il quale sono posizionati tutti gli altri. Ad ognuno di essi viene *attaccato* un sistema di riferimento rispetto al quale sono definiti i parametri

che determinano le forme geometriche che caratterizzano i volumi stessi. Il sistema di riferimento del volume iniziale è chiamato *MAster Reference System* (*MARS*) e le variabili cinematiche delle particelle tracciate sono definite relativamente a tale sistema.

Quando un volume ne contiene un altro al suo interno, esso è chiamato *MOTHER*, il volume *madre*, mentre quello che vi è contenuto è chiamato *DAUGHTER*, il volume *figlio*. Naturalmente i volumi *figli* ne possono contenere altri, con una struttura ad albero, fino ad una profondità di 15 livelli. In questo caso i volumi figli diventano *MOTHER* dei volumi che contengono. Il sistema di riferimento del volume *MOTHER* si chiama *Mother Reference System* (*MRS*), mentre quello del volume figlio è chiamato *Daughter Reference System* (*DRS*). Ovviamente, il *MRS* del primo volume, quello che contiene tutti gli altri, non è altro che il *MARS*.

Il posizionamento dei volumi *figli* nel *MOTHER* avviene, in generale, con una traslazione, **T**, e una rotazione **R**. La traslazione è semplicemente il vettore (definito nel *MRS*) che trasforma l'origine O_M del *MRS* in quella O_D del *DRS*. La rotazione, invece, è la matrice che trasforma gli assi del *MRS* in quelli del *DRS*: essa si calcola a partire dagli angoli polari sferici (Θ, Φ) di ciascun asse del *DRS* rispetto al *MRS*.² Indicando con e_i^M il versore dell'asse i -esimo ($i = x, y, z$) del *MRS* e con e_i^D quello analogo del *DRS*, la matrice è definita da

$$e_i^D = \sum_j R_{ij} e_j^M$$

$$e_i^D = \sin \Theta_i \cos \Phi_i e_1^M + \sin \Theta_i \sin \Phi_i e_2^M + \cos \Theta_i e_3^M,$$

con $i, j = x, y, z$.

4.4 IL MONTE CARLO

Il nostro programma, ovviamente, riflette la struttura di una simulazione *GEANT*. Risulta strutturato nelle tre fasi a cui abbiamo già fatto riferimento precedentemente (§ 4.3, pag. 63). Qui vogliamo mettere in evidenza soprattutto le prime due in quanto la parte finale consiste soprattutto nel salvare alcuni dati generali, come le informazioni sulla geometria delle camere e dei *TC* e nella chiusura di file aperti, quelli in cui si sono salvati, durante l'elaborazione, i dati essenziali per ogni evento simulato. Questi file sono poi utilizzati per un'analisi, per così dire, *off-line* dei risultati, alcuni dei quali riportati nel capitolo successivo.

4.4.1 Definizione dell'apparato

Per gli scopi che ci siamo prefissi, cui si è accennato al § 4.1, a pagina 61, non simuliamo tutto il rivelatore *MEG*, che comprende anche il *LXC*, ma solo quelle parti che ci sono necessarie, e cioè il campo magnetico, il bersaglio, le camere a drift, i contatori a scintillazione, ed anche le *atmosfera* (cioè i gas) in cui si trovano alcuni degli elementi citati (per esempio, la targhetta si trova in atmosfera di elio, mentre i *TC* sono immersi in quella di azoto).

Spesso ci siamo trovati nelle circostanze di decidere, ad esempio, se era il caso di mettere le camere in posizione radiale più vicina all'asse del magnete, o se le barrette di scintillatore dovevano essere più lunghe o più strette, o se ruotate di un dato angolo ecc. Ciò ci ha spinti ad impostare il programma in

² Naturalmente, $0^\circ < \Theta < 180^\circ$ e $0^\circ < \Phi < 360^\circ$.

modo che, per quanto possibile, presentasse una certa adattabilità. Quindi in fase di inizializzazione il programma legge due tipi di file.

Nel primo ci sono i dati che servono per inizializzare opportunamente **GEANT**: quanti eventi generare, il *seed* del generatore di numeri pseudo-casuali, se il tracking deve tener conto del multiplo scattering e così via. Tutti questi dati nel gergo di **GEANT** sono chiamati *cards*. Nel secondo file ci sono i dati (*user cards*, a questo punto) che riguardano il nostro rivelatore: le dimensioni geometriche delle singole camere, la loro posizione radiale, numero di camere ecc., ma anche la possibilità di decidere se simulare il moto di un positrone da un decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ o da quello di Michel. Per lungo tempo si è discusso sull'utilità o meno di utilizzare nell'esperimento il sistema dei contatori a scintillazione con le strisce in ϕ (fig. 3.12): nel nostro programma è possibile, tramite un apposita *card*, escludere completamente tale sistema.

Dopo aver letto questi dati, il programma passa alla *costruzione* del nostro rivelatore. Per ogni suo componente è necessario definire il materiale di cui è fatto e la forma geometrica (*shape*), cioè il volume, che lo rappresenta. Per i materiali, prima di tutto, si deve definire la composizione chimica (numero atomico, Z , e di massa, A , per ogni elemento), la densità, il peso atomico ecc. In **GEANT** ne esistono già 16 predefiniti, tra cui *idrogeno*, *elio*, *aria*... , il *vuoto*. Il vuoto è un materiale come gli altri, solo che ha tutti i suoi parametri (Z , A , densità...) pari a 10^{-16} . Ad ogni materiale così definito si associano, successivamente, alcuni parametri come:

- la massima intensità del campo magnetico (FIELDM);
- la massima deviazione angolare dovuta al campo magnetico e permessa in un singolo passo (TMAXFD);
- la massima frazione di energia persa in un singolo *step* (DEEMAX);
- il massimo passo geometrico consentito (STEMAX);
- l'accuratezza per l'attraversamento delle superfici di separazione di due mezzi (EPSIL);
- il minimo passo dovuto alla perdita di energia o al multiplo scattering (STMIN).

Inoltre, è necessario *comunicare* altri due dati: l'indicazione che il volume riempito dal materiale sia *sensibile* o meno (ISVOL) e la *qualità* del campo nel materiale (IFIELD). Infatti, il campo può essere assente, uniforme, non omogeneo, fortemente non omogeneo (il caso del nostro magnete). In ognuna di queste situazioni verrà utilizzato un algoritmo diverso per il *tracking*: un elica per il campo uniforme (attraverso la routine GHELX3), tratti elicoidali per quello debole (GHELIX), il metodo Runge-Kutta [Press *et al.*, 1992] nel caso forte (GRKUTA). L'indicazione della *sensibilità* del volume permetterà poi di definire quali parti dell'apparato dovranno *registrare* il passaggio della particella. In questo modo si completa la definizione dei cosiddetti *tracking media*. Va sottolineato che **GEANT**, normalmente, calcola automaticamente alcuni parametri di tracciamento, e questo per garantire una maggiore affidabilità dei risultati.

Per poter definire i volumi, **GEANT** offre 16 forme (*shape*) di base per mezzo delle quali è possibile *costruire* apparati anche di notevole complessità. Vediamo con degli esempi concreti, non esaustivi, come il nostro programma costruisce l'apparato da simulare.

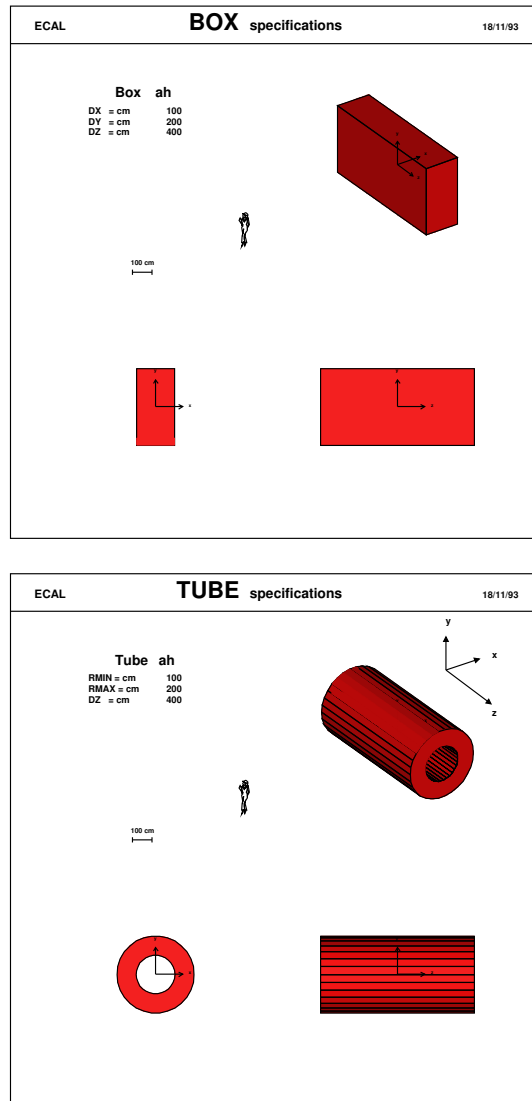


Figura 4.4: Le shapes BOX e TUBE

Il Frame

Con questo nome indichiamo il volume principale che contiene tutti gli altri e il cui sistema di riferimento, il **MARS**, coincide con quello del laboratorio, cioè origine nel centro del magnete ed asse Z come la linea del fascio. La sua forma è un cilindro realizzato con la shape di **GEANT** chiamata TUBE (fig. 4.4). Essa è definita da tre parametri: RMIN, il raggio interno, RMAX, quello esterno, e DZ, la semi-lunghezza in z. Nel nostro caso si tratta di un cilindro con raggio di 70 cm ($RMIN = 0$, $RMAX = 70$ cm) e lunghezza $2 \times DZ = 250$ cm. Poiché ogni volume di **GEANT** deve essere riempito con un *tracking medium*, il *Frame* è riempito di vuoto (*Vacuum tracking medium*).

Il bersaglio

La shape di **GEANT** utilizzata per definire la targhetta è quella chiamata BOX, cioè una *scatola* le cui pareti sono perpendicolari agli assi del sistema di riferimento locale (**DRS**) che gli è *attaccato*. I suoi parametri, DX, DY, DZ,

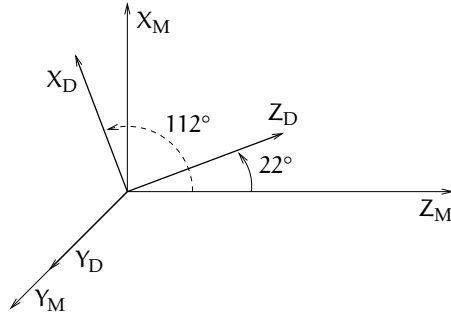


Figura 4.5: Relazione tra DRS e MRS nel posizionamento del bersaglio

rappresentano le semi-dimensioni lungo i rispettivi assi (fig. 4.4) e vengono acquisiti dal MC per mezzo di apposite *cards* utente.³

Dato che il bersaglio è immerso in atmosfera di elio, è necessario che abbia un MOTHER *riempito* da questo gas e con una forma (TUBE) come il *Frame*, ma con un raggio di dimensioni ridotte. Questo volume, il Positron Tracker Frame (PTKF), costituirà il MOTHER anche per tutto il sistema delle camere. Prima si posizionerà il MOTHER, che avendo la stessa origine e la stessa orientazione del *Frame* non richiede alcuna traslazione o rotazione, poi la targhetta. In questo caso, essendo inclinata di 22° rispetto alla linea del fascio, il suo posizionamento richiede di definire un'opportuna matrice di rotazione. La traslazione non è necessaria perché la targhetta, come noto, sta al centro del magnete. Gli angoli polari che definiscono l'orientazione degli assi del DRS rispetto al MRS sono: $(\Theta, \Phi)_x = (112^\circ, 0^\circ)$, $(\Theta, \Phi)_y = (90^\circ, 90^\circ)$, $(\Theta, \Phi)_z = (22^\circ, 0^\circ)$; essi si deducono facilmente osservando la figura 4.5.

Le camere

L'assemblaggio dei componenti di questo sistema è stato certamente più laborioso di quanto descritto finora.

Prima di tutto è stato necessario definire diversi nuovi materiali, quali il *kapton*, con cui sono fatte le pareti delle celle delle singole camere, e la miscela di *elio-etano*, che le riempie. Inoltre abbiamo trovato utile creare alcuni volumi ausiliari per mezzo dei quali è stato più semplice posizionare i singoli elementi.

Inizialmente abbiamo definito un volume madre, a forma di TUBE, che racchiudesse tutto lo spazio contenente le camere. Questo volume, come abbiamo visto descrivendo il posizionamento del bersaglio, è il PTKF.

Per quanto riguarda i singoli settori, sappiamo che ognuno di essi è costituito da una coppia sfalsata di celle: un foglio di kapton le separa e costituisce le pareti del settore. Ogni cella è semplicemente un volume della miscela di elio-etano. Allora abbiamo definito un volume fittizio, il DRift Chamber Element (DRCE), *riempito* di vuoto, e che facesse da MOTHER al singolo settore del sistema delle camere. La *shape* di GEANT utilizzata è quella identificata con TRD1, che è il volume *trapezoidale* mostrato nella figura 4.6. I parametri DX1 e DX2 costituiscono le semi-lunghezze delle basi del *trapezoide*, mentre DY e DZ sono rispettivamente il semi-spessore in y e la semi-altezza in z.⁴ Con la stessa *shape* sono stati creati anche i volumi del foglio di kapton, Kapton Gas Tight Layer (KGTIL), e della miscela di elio-etano, Active Gas Layer (AGAL). Poiché questi tre volumi (DRCE, KGTIL, AGAL) hanno la stessa forma, è piuttosto semplice *costruire* la singola camera: sono sufficienti delle

³ Tipici valori sono $2 \times (DX, DY, DZ) = (0.01, 4, 9.9)$ cm.

⁴ Tipici valori per una camera sono $2 \times (DX1, DX2, DY, DZ) = (100, 44, 1.5, 9.5)$ cm.

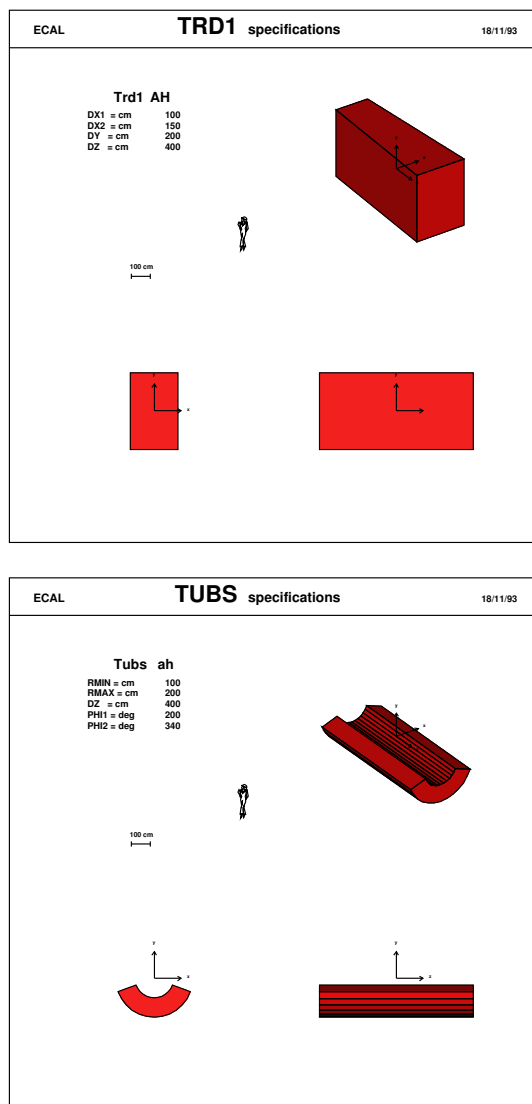


Figura 4.6: Le *shapes* TRD1 e TUBS

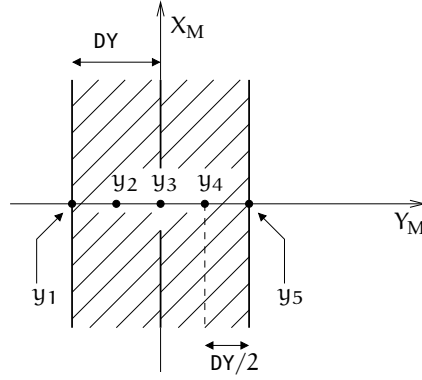


Figura 4.7: La costruzione del DRCE

semplici traslazioni dei volumi figli (KGTL, AGAL) rispetto al MOTHER (DRCE). Tenendo conto che il sistema di riferimento *attaccato* a questi volumi ha origine nel loro centro (fig. 4.6), le traslazioni sono rappresentate dal vettore $T_i \equiv (0, y_i, 0)$, $i = 1, \dots, 5$, dove $y_1 = -DY$ per il primo foglio di kapton (una parete della camera), $y_2 = -DY/2$ per la prima cella di AGAL, $y_3 = 0$ per il secondo foglio di kapton (quello che separa le due celle), $y_4 = +DY/2$ per la seconda cella di AGAL ed infine $y_5 = +DY$ per il terzo foglio di kapton (l'altra parete della camera). Queste traslazioni sono indicate brevemente nella figura 4.7. In questo modo si completa l'assemblaggio di un singolo settore (DRCE) del sistema delle camere.

Il passo successivo è quello di disporre tutti i 17 settori (DRCE) in modo che assumano posizione radiale nello spettrometro (cioè nel PTKF) e distanziati di 10° in ϕ (sia il numero totale di settori, N_{DRC} , che la loro separazione angolare, $\Delta\phi_{DRC}$, possono essere cambiati per mezzo delle *cards* utente). In questa fase non è più sufficiente definire le sole traslazioni, ma occorre definire, per ogni camera, anche un'appropriata matrice di rotazione. Se indichiamo con ϕ_i , $i = 1, \dots, N_{DRC}$, l'angolo azimutale del piano mediano dell' i -esima camera (il piano su cui giace il secondo foglio di kapton, cioè la parete di separazione tra due celle AGAL), allora la traslazione per questo settore è $T_i \equiv (\rho_c \cos \phi_i, \rho_c \sin \phi_i, 0)$, dove ρ_c è la distanza radiale dell'origine del DRS, *attaccato* al DRCE, dall'asse Z. La traslazione non ha la componente z , $(T_i)_z = 0$, ed avviene solo nel piano XY. Infatti, come abbiamo visto nel § 3.3.2, a pagina 52, il sistema delle camere è *speculare* rispetto a tale piano, come risulta evidente anche dalle figure 3.1 e 3.13.

La matrice di rotazione *ruota* il piano mediano del settore di un angolo ϕ_i ed è determinata dalle coordinate sferiche degli assi del DRS rispetto al MRS: $(\Theta, \Phi)_x = (180^\circ, 0^\circ)$, $(\Theta, \Phi)_y = (90^\circ, \phi_i + 90^\circ)$, $(\Theta, \Phi)_z = (90^\circ, \phi_i)$. La posizione relativa tra i sistemi di riferimento citati è illustrata schematicamente nella figura 4.8. In essa dobbiamo immaginare che l'asse Z_M del MRS è *uscende* dalla pagina, mentre quello X_D del DRS è *entrante*. Questo significa che $\Theta_x = 180^\circ$, mentre Φ_x è indefinito; per convenzione lo possiamo assumere nullo. In ogni caso GEANT, utilizzando la definizione degli altri due assi, costruirebbe sempre una terna normalizzata e con la giusta orientazione.

I contatori a scintillazione

Il sistema completo dei contatori a scintillazione (§ 3.3.3, pag. 53), od anche del tempo di volo, Timing Of Flight (TOF), è costituito dalle strisce di scintillatore disposte in ϕ , le quali sono state identificate nel programma

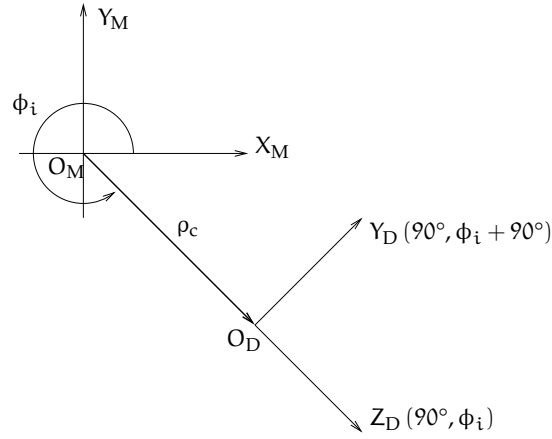


Figura 4.8: MRS e DRS nel posizionamento delle camere. Tra parentesi le coordinate (Θ, Φ) degli assi.

con Timing Counter Inner (TCI), e dalle barrette longitudinali più esterne, Timing Counter Outer (TCO) (fig. 3.12). In realtà, come già anticipato, nella simulazione abbiamo la facoltà di escludere completamente il sistema dei TCI.

Il volume delle strisce in ϕ è ricavato dalla *shape* di GEANT denominata TUBS, e mostrata nella figura 4.6. I parametri RMIN, RMAX e DZ hanno lo stesso significato visto con la forma TUBE, mentre PHI1 e PHI2 denotano, rispettivamente, l'angolo *iniziale* e *finale*, in ϕ , del segmento *tubolare*. Le dimensioni di default nel MC sono una larghezza ($2 \times DZ$) ed uno spessore ($RMAX - RMIN$) di 5 mm; in ϕ si estendono da 219° fino a 375° . Tra una striscia e l'altra, c'è una piccola *gap* di 1 mm ed in tutto, per ogni lato dello spettrometro, sono 128: occupano, così, uno spazio in z di quasi 80 cm (che è la lunghezza tipica di una barretta esterna). Le barrette del TCO sono semplicemente delle BOX di dimensioni complessive $3.9 \text{ cm} \times 3.9 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$. Come sempre nel MC questi dati sono configurabili con le *cards* utente. Il materiale scintillante utilizzato è il poliviniltoluene (C_9H_{10}).

Poiché tutto il sistema del TOF si trova in atmosfera di azoto (§ 3.3.3, pag. 53), è stato conveniente definire un volume, il Timing Of Flight Frame (TOFF), a forma di TUBE, che lo contenesse, e riempito di azoto. Contrariamente agli esempi visti finora, però, pur essendo la dimensione longitudinale come quella del *Frame*, il parametro RMIN della *shape* non è nullo, ma è calcolato insieme a RMAX in base alla configurazione effettiva di tutto il sistema del TOF. Infatti nel programma prevediamo la possibilità che le barrette esterne possano essere ruotate intorno al loro asse. Questo significa che il volume radiale occupato dal sistema del TOF dipende dall'angolo di rotazione delle barrette.

Se immaginiamo di guardare verso l'asse Z negativo, la configurazione può essere rappresentata come quella della figura 4.9. Per semplicità mostriamo una sola barretta. L'angolo γ indica la rotazione in verso orario delle barrette: un valore $\gamma = 0$ corrisponde alla configurazione originaria illustrata nella figura 3.12. Come si vede, in generale, le barrette si trovano dentro una *corona* cilindrica con raggio interno R_m e raggio esterno R_p , che dipendono da γ . Tenendo conto della *gap*, ΔR_{gap} , tra le barrette (TCO) e le strisce (TCI), e dello

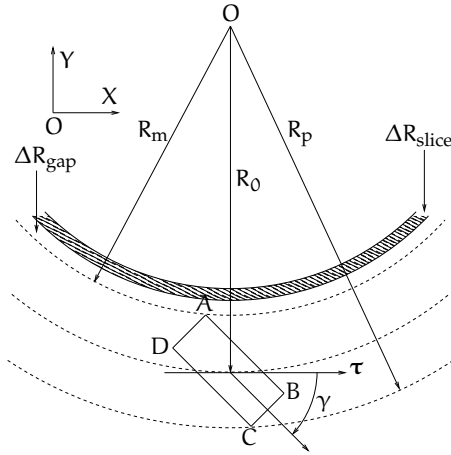


Figura 4.9: Volume radiale determinato dalla rotazione della barretta

spessore, ΔR_{slice} ⁵ di queste, la TUBE corrispondente al **TOFF** ha i parametri **RMIN** e **RMAX** dati da

$$\begin{aligned} \text{RMIN} &= R_m - \Delta R_{\text{gap}} - \Delta R_{\text{slice}} \\ \text{RMAX} &= R_p. \end{aligned} \quad (6)$$

La differenza $\Delta R \equiv R_p - R_m$, cioè lo *spessore* della corona contenente le barrette, può essere calcolata con la seguente espressione

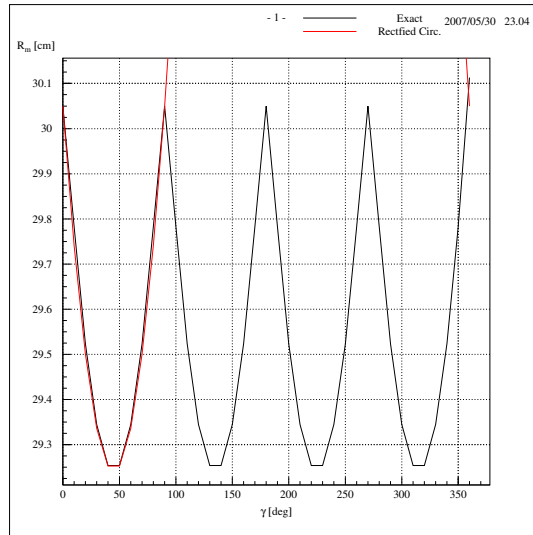
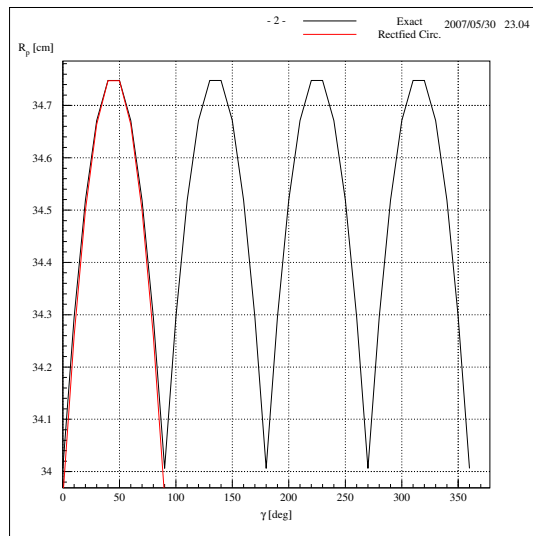
$$\Delta R \equiv R_p - R_m = l \sin \gamma + d \cos \gamma, \quad (7)$$

dove $l \equiv \overline{AB} = \overline{CD}$ e $d \equiv \overline{AD} = \overline{BC}$ sono le dimensioni trasverse delle barrette (fig. 4.9). In realtà tale formula è ricavata su una configurazione *rettificata*, ottenuta cioè immaginando di *srotolare* la superficie cilindrica che contiene gli assi delle barrette. Essa ci permette di calcolare R_m e R_p , utilizzati nella (6), con

$$\begin{aligned} R_m &= R_0 - \frac{1}{2} \Delta R \\ R_p &= R_0 + \frac{1}{2} \Delta R, \end{aligned} \quad (8)$$

in cui R_0 è la distanza radiale degli assi delle barrette ed è definita nel programma, così come l'angolo di rotazione γ , per mezzo di apposite *cards* utente. Nella figura 4.10 mostriamo il confronto tra il calcolo approssimato che abbiamo descritto di R_m e R_p e quello esatto (a cui sarà fatto cenno, con altri dettagli sul ricavo della (7), nell'appendice B). Come era naturale aspettarsi, per $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$, la formula (7) *funziona* molto bene ad eccezione degli estremi, 0° e 90° , i quali, tra l'altro, possono essere considerati a parte. Se l'angolo γ avesse valori tali che l'approssimazione per ΔR fosse insufficiente, il volume del **TOFF** andrebbe a sovrapporsi parzialmente con quello del **PTKF**, e ciò non sarebbe auspicabile per un corretto funzionamento di **GEANT**. Per questo abbiamo fatto un'ulteriore *verifica*: al **MC** è stato aggiunto un controllo che, qualora ciò accadesse, il programma lo segnalerebbe e si arresterebbe. Ad ulteriore conferma della validità dell'espressione (7), ciò non si è mai verificato.

⁵ La *gap* ha un valore tipico di 3 m.m., mentre, come abbiamo già anticipato, lo spessore delle strisce è di 5 m.m.

(a) R_m (b) R_p **Figura 4.10:** Il confronto con il calcolo esatto di R_m e R_p

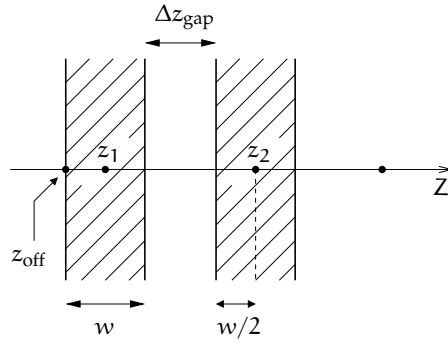


Figura 4.11: Schema del posizionamento delle strisce TCI

Dopo aver definito il **TOFF**, e riempito di azoto, si possono posizionare il sistema dei **TCI** (quando la simulazione lo richiede) e quello dei **TCO**. La TUBS delle strisce interne ha lo stesso parametro **RMIN** del **TOFF**, mentre **RMAX** è semplicemente $RMIN + \Delta R_{\text{slice}}$. Quindi per il posizionamento non sono necessarie delle rotazioni ma solo la traslazione, in z , dell'origine del loro **DRS**. Se indichiamo con w la larghezza della striscia e con Δz_{gap} la *gap* tra due strisce consecutive, l' i -esima striscia viene sistemata con la traslazione $T_i = (0, 0, \pm z_i)$ definita da

$$z_i = z_{i-1} + w + \Delta z_{\text{gap}}, \quad i = 2, 3, \dots, N_{\text{slice}}$$

$$z_1 = z_{\text{off}} + \frac{w}{2},$$

dove z_{off} è il limite inferiore (*offset*) dello spazio occupato in z e N_{slice} , il numero totale di strisce. La figura 4.11 illustra sinteticamente il principio di questa operazione.

Ben più complicato è il posizionamento delle barrette esterne (**TCO**). In questo caso oltre a definire la traslazione del **DRS** è necessario definirne anche un'appropriata matrice di rotazione. Se facciamo riferimento alla figura 4.12, s'intuisce che la traslazione, T_i , per l' i -esima barretta è definita da

$$T_i = (R_0 \cos \phi_i, R_0 \sin \phi_i, \pm z_b),$$

in cui ϕ_i è la posizione angolare dell'asse della barretta e z_b la coordinata z del suo baricentro: $z_b = z_{\text{off}} + DZ$, essendo z_{off} l'offset (in z) delle barrette e DZ la loro semi-lunghezza; i segni si riferiscono al posizionamento su entrambe i lati dello spettrometro. La matrice di rotazione, invece, è definita dalle coordinate angolari degli assi (§ 4.3.3, pag. 67): $(\Theta, \Phi)_x = (90^\circ, \phi_i - \gamma)$, $(\Theta, \Phi)_y = (90^\circ, \phi_i + 90^\circ - \gamma)$, $(\Theta, \Phi)_z = (0^\circ, 0^\circ)$.

I rivelatori sensibili

Finora, in questa discussione, abbiamo cercato di descrivere gli elementi principali dell'apparato, trascurando alcuni particolari secondari (quali, ad esempio, i supporti di vetronite per le camere) che avrebbero appesantito inutilmente la descrizione.

Qui vogliamo brevemente soffermarci sul fatto che per poter considerare conclusa l'operazione di *costruzione* del rivelatore, è necessario, secondo la consuetudine in **GEANT**, classificare in *insiemi* (*sets*) tutti i componenti sensibili per i quali l'utente vuole memorizzare le informazioni utili quando essi sono colpiti dalle particelle tracciate. Normalmente è conveniente (e raccomandato)

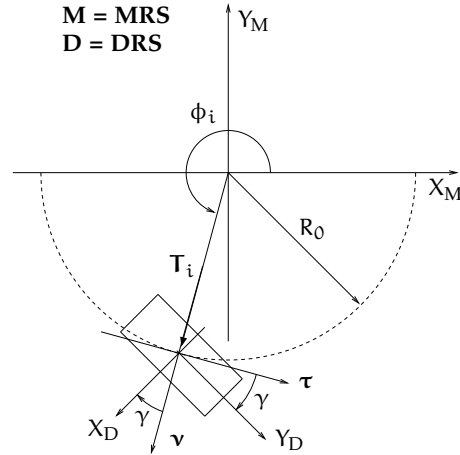


Figura 4.12: Schema del posizionamento delle barrette TCO

avere un *set* per ogni elemento principale dell'apparato. Nel nostro caso, per esempio, tutto l'insieme delle camere costituisce un *set* sensibile chiamato Positron TRacKer (PTRK); allo stesso modo avremo il *set* di tutte le strisce interne dei contatori a scintillazione, il Timing Of Flight Inner (TOFI) e quello delle barrette esterne, il Timing Of Flight Outer (TOFO).

Oltre a questo *raggruppamento* per componenti, per così dire, *omogenei*, è necessario definire l'*hit*, cioè l'informazione che viene registrata nella fase di *tracking*. Tanto per essere concreti, quando la particella si trova, per esempio, in una barretta del *set* TOFO, il nostro programma registra le coordinate del punto d'ingresso (X_A, \dots, Z_A), quelle del punto d'uscita (X_B, \dots, Z_B), il tempo d'impatto (TIMP), l'energia persa nell'attraversare la barretta (ELoS), la lunghezza della traccia di attraversamento (SLEN), gli angoli d'impatto (CALP, ...) e così via. Il fatto di aver creato i tre *set* visti prima, ci permetterà, poi, di registrare (GSAHIT, storing) queste informazioni in banchi dati differenti così da poterli identificare al momento opportuno. Infatti alla fine dell'elaborazione dell'evento corrente, sarà necessario prelevare (GFHITS, fetching) tutti questi dati registrati durante la fase di *tracking* e salvarli nei file utilizzati per l'analisi *off-line* dei risultati, e quindi avremo bisogno di conoscere se un hit si è verificato su una camera, su una barretta esterna o su una striscia interna.

Con la definizione dei *sets* sensibili e la struttura dati (*hit*) da registrare quando la particella *interagisce* con essi, possiamo considerare chiusa la fase di definizione del rivelatore, cioè di inizializzazione del MC, e passare a descrivere quella di elaborazione dell'evento. In questo caso, all'utente è richiesto, essenzialmente, di fornire la propria implementazione di tre routine di GEANT: GUKINE, GUSTEP, GUOUT. Con la prima si definisce la cinematica iniziale dell'evento; con la seconda, alla fine di ogni *tracking step*, si registrano, nelle rispettive strutture dati, gli hit con i rivelatori e le coordinate spaziali della traiettoria; con la terza si ha l'output dei risultati per l'evento corrente, cioè il disegno della traccia e dell'apparato o il salvataggio delle informazioni essenziali nei file per l'analisi *off-line*.

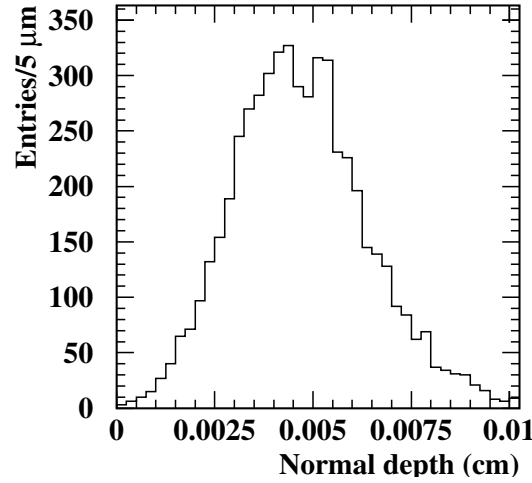


Figura 4.13: La distribuzione dello stop dei muoni nel bersaglio

4.4.2 La cinematica iniziale

Per poter tracciare la traiettoria della particella attraverso tutto l'apparato, [GEANT](#) deve integrare numericamente le equazioni del moto e quindi è necessario specificare le condizioni cinematiche iniziali per le particelle che si intendono tracciare.

Con la routine GUKINE l'utente specifica il numero e il tipo (e^+ , e^- , γ , μ , ...) delle particelle che vuole tracciare nonché, per ognuna di esse, il vertice da cui inizia la traccia, cioè la *posizione iniziale*, e la *quantità di moto iniziale*.

Il nostro programma prevede la possibilità di generare, fondamentalmente, due tipi di eventi: decadimenti $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ e quelli di Michel, $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$. Nel primo caso è possibile tracciare il positrone oppure entrambe le particelle finali, aventi lo stesso vertice iniziale ma con gli impulsi opposti ($\mathbf{p}_e = -\mathbf{p}_\gamma$); nel secondo caso, invece, si traccia soltanto la particella carica dello stato finale, con energia distribuita secondo lo spettro omonimo

$$\frac{dN_e}{dx} = 2x^2(3 - 2x), \quad x = \frac{2E_e}{m_\mu} \quad (9)$$

essendo x , l'energia normalizzata del positrone.

Sia per gli eventi $\mu \rightarrow e \gamma$ che per quelli di Michel, il metodo per generare il vertice e l'impulso iniziale è praticamente lo stesso.

Generazione del vertice

Il vertice, V , di decadimento viene generato tenendo conto dello sparpagliamento gaussiano del fascio di muoni e della profondità media, a cui avviene lo stop dei muoni nel bersaglio. Come abbiamo già anticipato nel § 3.2.1 di pagina 44, a causa dell'atmosfera di elio in cui si trova la targhetta, il fascio di muoni subisce un *allargamento* in x e y (z è la direzione del fascio) con $\sigma_{x,y} \approx 10$ mm. D'altra parte, sappiamo da uno studio preliminare [[Mori et al., 1999](#)], i cui risultati sono riportati nella figura 4.13, che i muoni si fermano ad una distanza media (in direzione normale) di circa $50 \mu\text{m}$ dalla superficie, con distribuzione approssimativamente gaussiana avente $\sigma \approx 20 \mu\text{m}$.

Se indichiamo con d la profondità normale (*depth*) a cui si ferma il muone, la coordinata z_V del vertice è data dalla seguente espressione

$$z_V = x_V \cdot \cotg \alpha - \frac{DX}{\sin \alpha} + \frac{d}{\sin \alpha}, \quad (10)$$

dove x_V è l'ascissa del vertice, $\alpha = 22^\circ$ è l'inclinazione del bersaglio rispetto all'asse Z e DX il suo semi-spessore: come si ricorderà esso rappresenta uno dei parametri della corrispondente *shape*. Nell'appendice C si illustra brevemente la costruzione geometrica che permette di ricavare l'equazione (10). Utilizzando tre numeri pseudo-casuali con distribuzione normale (u_x, u_y, u) ,⁶ il MC calcola le coordinate del vertice come

$$\begin{cases} x_V = u_x \cdot \sigma_x \\ y_V = u_y \cdot \sigma_y \\ z_V = x_V \cdot \cotg \alpha - \frac{DX}{\sin \alpha} + \frac{\bar{d} + u \cdot \sigma}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (11)$$

in cui \bar{d} è la profondità normale media. Ma non basta! Infatti, a causa delle code gaussiane, potrebbe accadere che il vertice, così come calcolato nella (11), cada *esternamente* al bersaglio. Allora trasformando le coordinate di V dal MOTHER al DAUGHTER è agevole fare tale verifica (appendice C), accettando solo gli eventi che hanno il vertice effettivamente interno al *target*.

Generazione dell'impulso

Nel generare l'impulso, l'unica differenza tra gli eventi $\mu \rightarrow e\gamma$ e quelli di Michel è che nei primi la quantità di moto assoluta è esattamente 52.8 MeV/c mentre nei secondi è distribuita secondo lo spettro di Michel rappresentato dall'equazione (9). Teniamo presente che questa formula è data in approssimazione $m_e \ll m_\mu$ e quindi $E_e \approx p_e$ [Okun, 1986; Lee, 1981]. Nel MC i numeri pseudo-casuali x , distribuiti come lo spettro (9), si ottengono per mezzo di un sottoprogramma di libreria.⁷

Dopo aver determinato la quantità di moto assoluta dell'evento da simulare, si completa la definizione dell'impulso calcolandone la direzione. Il nostro programma ci permette di decidere se generare eventi distribuiti isotropicamente su tutto l'angolo solido o solo nell'intervallo dell'accettanza angolare di tutto il rivelatore MEG.⁸ Nel primo caso, se indichiamo con r_1 e r_2 due numeri pseudo-casuali distribuiti uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$,⁹ gli angoli polari dell'impulso sono determinati dalle relazioni:¹⁰

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \cdot r_1 - 1 \\ \phi &= 2\pi \cdot r_2. \end{aligned}$$

Nel secondo caso, invece, abbiamo

$$\begin{aligned} \cos \theta &= (c_2 - c_1) \cdot r_1 + c_1 \\ \phi &= (2 \cdot r_2 - 1) \cdot \phi_0, \end{aligned}$$

⁶ Generati, ad esempio, con la routine RNORMX di CERNLIB [Shiers e Goossens, 1996].

⁷ HBFUN1 di CERNLIB.

⁸ Una distribuzione isotropa significa che la densità deve essere proporzionale all'elemento di angolo solido $d\Omega = d(\cos \theta) d\phi$, cioè $\cos \theta$ e ϕ devono essere uniformemente distribuiti.

⁹ Ottenuti con GRNDM di GEANT, per esempio.

¹⁰ Un'introduzione elementare alle tecniche di Monte Carlo è costituita dall'omonima sezione nel PDG [Amsler *et al.*, 2008, p. 330].

dove r_1 e r_2 sono definiti come prima; questo significa che la direzione della quantità di moto è compresa nell'intervallo

$$c_1 < \cos \theta < c_2, \quad |\phi| < \phi_0.$$

I parametri c_1 , c_2 e ϕ_0 sono definiti dall'utente per mezzo di apposite *cards*.¹¹

4.4.3 Tracking e hit

Dopo aver completato la definizione della cinematica (GUKINE), **GEANT** ha tutte le informazioni necessarie per poter calcolare le traiettorie delle particelle di cui è richiesto il *tracking*, e questo viene fatto in gran parte per mezzo di routine proprie, non definibili dall'utente.

In **GEANT** tracciare una particella attraverso tutta la struttura della geometria dell'apparato significa calcolare un insieme di punti in uno spazio a sette dimensioni $(t, x, y, z, p_x, p_y, p_z)$: tale insieme costituisce ciò che normalmente si chiama *la traiettoria della particella*. Per ottenere tutto ciò è necessario integrare le equazioni del moto, a piccoli passi, da un punto della traiettoria al successivo, ed applicare le correzioni necessarie dovute alla presenza della materia.

In generale i passi con cui è calcolata la traccia non sono tutti uguali. **GEANT** applica sofisticati algoritmi per una stima dello *step* da compiere. Questo dipende oltre che dalla natura della particella (carica, massa, vita media e così via) anche dal *tracking medium* corrente in cui si trova la particella. Dopo aver determinato lo *step*, il trasporto procede in linea retta per particelle neutre o in assenza di campo magnetico, mentre subisce una deflessione se questo è presente. Anche qui **GEANT** può adottare diversi algoritmi in base ai parametri del mezzo di tracciamento (IFIELD, § 4.4.1, pag. 68). Tranne nel caso che il campo sia uniforme, all'utente è richiesto di definire, tramite la routine GUFIELD, come **GEANT** deve calcolare le componenti del vettore campo magnetico, $\mathbf{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)$, in un punto $P(x, y, z)$ dello spazio.

Nel nostro **MC**, per $z \geq 0$, il campo è calcolato a partire dalle seguenti formule

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= B_r(r, z) \cdot \frac{x}{r} \\ B_y(x, y, z) &= B_r(r, z) \cdot \frac{y}{r} \\ B_z(x, y, z) &= B_z(r, z), \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato la distanza del punto P dall'asse Z con $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. Le componenti B_r e B_z , invece, sono date dall'equazione (5): esse dipendono dai valori delle mappe ai nodi di una griglia bidimensionale, come descritto al § 4.2, di pagina 62. Per $z < 0$ è sufficiente tener conto dell'equazione (3). Osserviamo, inoltre, che x/r e y/r non sono altro che i coseni direttori con gli assi X e Y della componente trasversa del campo, \mathbf{B}_r . Le mappe (4), precedentemente calcolate e memorizzate in un file, sono caricate in memoria dal programma in fase di inizializzazione.

Alla fine dello *step* corrente, l'utente dispone di un insieme di informazioni che **GEANT** ha saggiamente *registrato* durante il *tracking*. Egli può conoscere se la particella è trasportata all'interno di un volume o se ne sta uscendo; se è scomparsa per decadimento oppure perché uscita dall'apparato e così via. Tutti questi dati sono necessari all'utente per compiere le azioni appropriate

¹¹ Come abbiamo visto al § 3.3.2, a pagina 52, tipicamente si ha $c_2 = -c_1 = 0.35$, $\phi_0 = 60^\circ$.

con la routine GUSTEP, chiamata alla fine di ogni *tracking step*. Nel nostro caso, il programma si prepara a tracciare i prodotti secondari (se ce ne sono stati) e a *registrare* gli eventuali hit con i nostri *strumenti*. Una delle informazioni che si hanno in questa fase è quella di conoscere in quale dei tre rivelatori sensibili del nostro apparato (§ 4.4.1, pag. 77) si trova il positrone. Ovviamente può accadere che non abbia *interagito* con nessuno dei sistemi previsti e quindi il programma continua con lo *step* successivo. Se però la particella si trova in uno dei tre rivelatori sensibili, abbiamo ciò che si chiama un *hit*. Il MC in questo caso *registra* tutte le grandezze necessarie e alle quali si è fatto cenno al § 4.4.1 di pagina 77. Per ognuno dei tre rivelatori la sequenza di azioni che il programma compie per la memorizzazione di queste informazioni è praticamente la stessa, ma ha particolare importanza la descrizione del passaggio del positrone attraverso le barrette del TOFO.

4.4.4 L'hit sulle barrette esterne

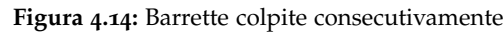
Quando il positrone colpisce il sistema esterno dei contatori a scintillazione, una delle grandezze più significative da *registrare* è quella relativa agli angoli d'impatto. Infatti lo studio che abbiamo fatto degli angoli d'impatto sulle barrette esterne ha determinato la modifica progetto iniziale sulla configurazione dei TCO. Come spiegato al § 3.3.3, a pagina 53, questo prevedeva delle barrette longitudinali non ruotate, come mostrato anche nella figura 3.12. Risulta evidente, però, che se queste sono ruotate di un angolo tale che la traccia le attraversi perpendicolarmente, ne avrebbe giovamento tutto il sistema di acquisizione del *timing* del positrone. Infatti, quando la traccia attraversa la barretta in direzione perpendicolare, la sua lunghezza all'interno è minima e ciò produce un lampo di luce molto netto, stretto nel tempo: proprio ciò che è richiesto per una buona risoluzione temporale. Se invece la traiettoria procede in modo obliquo nella barretta, la sua lunghezza di attraversamento è più lunga e la luce di scintillazione presenta un'intensità con delle code altrettanto lunghe, impoverendo così la risoluzione del *timing*.

Alcune delle nostre simulazioni hanno avuto lo scopo di studiare gli angoli d'impatto in funzione dell'angolo di rotazione delle barrette attorno al proprio asse. Ciò che si è cercato di determinare è il valore di tale angolo in modo che il maggior numero di eventi attraversi le barrette quanto più verticalmente. Alcuni risultati sono riportati nel capitolo successivo.

Un'altra informazione che *registriamo* è quella che riguarda la prima e l'ultima delle barrette colpite consecutivamente in un singolo giro.¹² Nel MC le barrette sono identificate con un numero, da 1 a N_{bar} , in senso orario,¹³ come indicato schematicamente nella figura 4.14. Allorché una barretta è colpita, possiamo verificare nel programma se è la prima per l'evento corrente. In caso affermativo ne memorizziamo l'indice, i_{bF} (F, *first*). Se invece ci sono state altre barrette attraversate dalla traccia, conserviamo l'indice, i_{bL} (L, *last*), di quella raggiunta attualmente *solo* se è la consecutiva all'ultima colpita. Consideriamo l'esempio illustrato nella figura 4.14. Quando la traiettoria colpisce la barretta A, non ce ne sono altre attraversate prima, per cui $i_{\text{bF}} = i_{\text{bar}}$. La barretta B è colpita solo dopo che è stata attraversata la A, e ne è la consecutiva, $i_{\text{bar}} + 1$, così $i_{\text{bL}} = i_{\text{bar}} + 1$. La stessa cosa vale per la barretta C rispetto alla B, cioè possiamo assumere $i_{\text{bL}} = i_{\text{bar}} + 2$.

¹² Risulta evidente che se la traccia compie più giri, la stessa barretta può essere colpita più volte: il programma non considera questi casi.

¹³ Non è casuale che le barrette siano numerate in questo verso: se si tiene conto di come è fatto il magnete e quindi l'orientazione del campo magnetico, ci si rende conto facilmente che questo è anche il verso in cui spiralizzano, normalmente, i positroni.

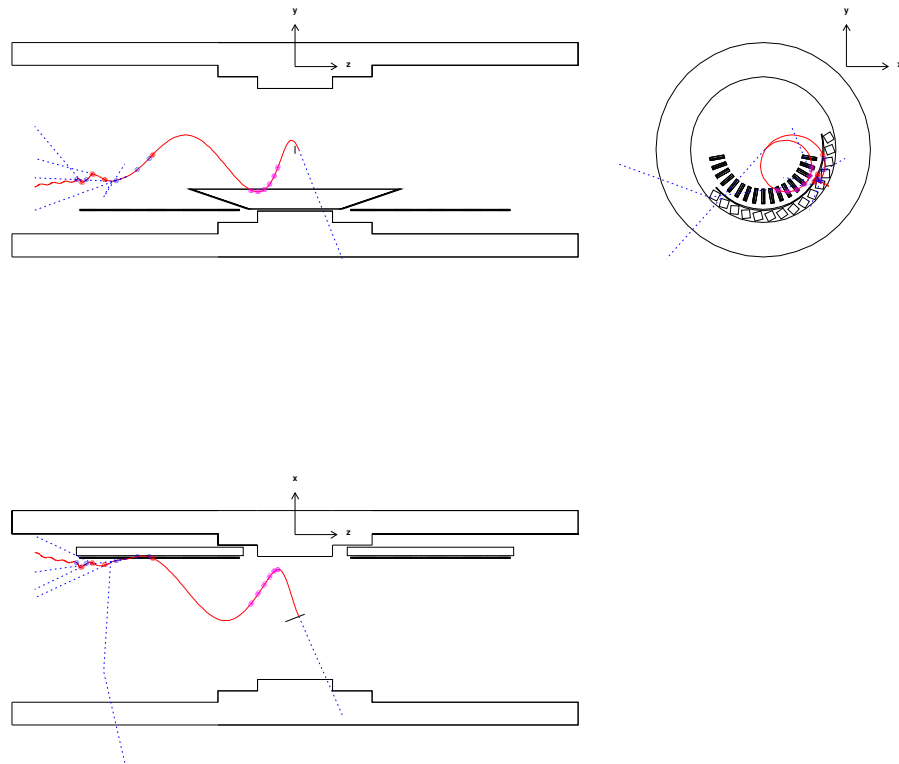

$$i_{bL} - i_{bF} + 1 = (i_{bar} + 2) - i_{bar} + 1 = 3.$$

4.4.5 L'output dell'elaborazione

- salva una parte dei dati in un file, chiamato il *file degli eventi*, che è quello utilizzato dal programma di [RC](#);
- memorizza un'altra parte di dati nel *file delle ntuple*, utilizzato da [PAW](#) per un'analisi dei risultati;
- disegna le traiettorie delle particelle generate per l'evento corrente e alcune parti del rivelatore.

Per quanto riguarda l'ultimo punto, dobbiamo dire che, normalmente richiediamo il *plot* degli eventi solo per ragioni di *debugging* e, per così dire, *didattiche*. Inoltre, quando richiediamo l'output grafico, impostiamo i dati in input in modo che il programma generi solo pochi eventi (~ 100), altrimenti l'esecuzione sottrarrebbe, inutilmente, risorse per l'elaborazione numerica. Alcuni esempi di eventi generati dal MC sono riportati nelle figure 4.15 e 4.16. In esse le linee di colore rosso indicano le traiettorie dei positroni; in blue, e tratteggiate, quelle dei fotoni. I *cerchietti* di colore magenta, rosso e blue si riferiscono, rispettivamente, agli hit con il sistema delle camere a drift, quello

EVENT 27

Figura 4.15: Un decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$

delle strisce in ϕ (TCI) e le barrette esterne (TCO). Nella figura 4.15, oltre alla traccia del fotone prodotto (*back to back* con quella del positrone), si notano pure diversi secondari, prevalentemente γ di *bremsstrahlung*, ma in qualche caso, forse, *annichilazione* e *compton*.

Più articolata è la questione del salvataggio dei dati da utilizzare successivamente.

Nel caso delle informazioni necessarie al programma di RC, queste consistono prevalentemente nelle coordinate degli hit con le camere. Per testare poi l'efficacia della nostra ricostruzione sarà necessario passare anche le coordinate del vertice di decadimento, impulso iniziale ecc., in modo da poter effettuare un confronto con le corrispondenti grandezze ricostruite. Tutto ciò non richiede una particolare struttura del *file degli eventi*, e i dati vi si possono memorizzare in formato libero, che qualunque altro programma può facilmente interpretare.

Diverso è il caso dei dati che dovranno essere analizzati con PAW. In questo caso non è necessario memorizzare, ad esempio, tutte le coordinate degli hit sulle camere o nelle barrette. Se la traccia compie più giri, è evidente che un singolo elemento del rivelatore può essere colpito più volte. Non avrebbe senso memorizzare tutte queste informazioni, ma conservare il primo o al più il secondo degli hit per componente è sufficiente. Oltre a ciò, la struttura dati deve essere organizzata in modo che sia interpretabile da PAW. Normalmente le informazioni che sono analizzate da PAW vengono strutturate in *ntuple*: in sintesi per ogni evento è come se fosse definito un *array* i cui elementi sono le grandezze che si vogliono elaborare per quell'evento. Nel nostro caso,

EVENT 35

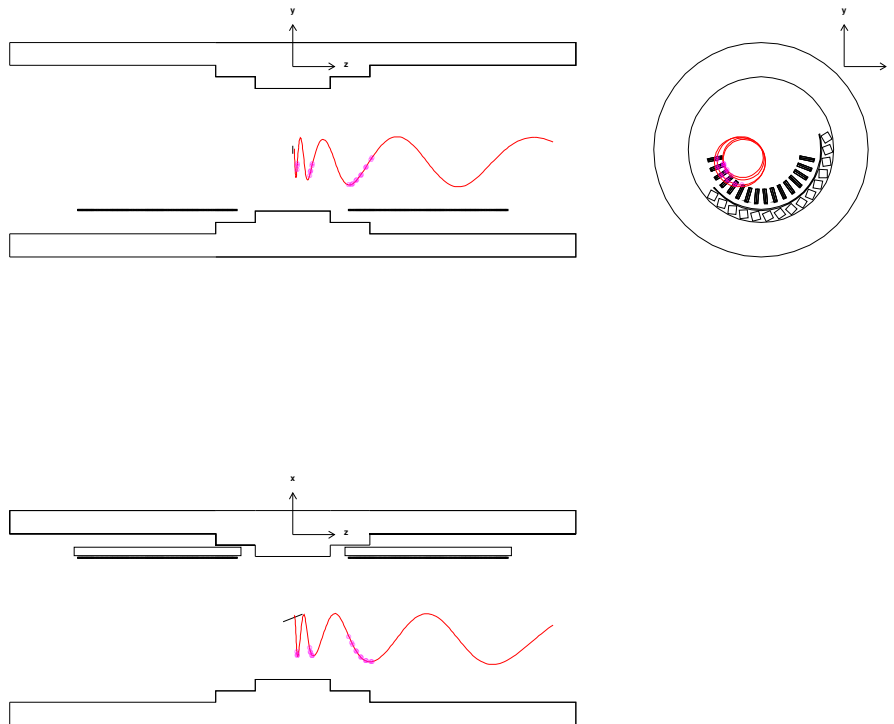


Figura 4.16: Traccia di un positrone di Michel

oltre alle grandezze che costituiscono l'*hit*,¹⁴ e a cui si è fatto cenno al § 4.4.1, a pagina 77, per ogni evento, l'*ntuple* memorizza il numero dell'evento, il vertice, la quantità di moto, gli indici (i_{bF} e i_{bL}) della prima e dell'ultima delle barrette colpite (lo stesso per le camere e le strisce interne) e così via, per un totale di oltre 100 grandezze.

Va precisato che, per conseguire quanto descritto finora, il MC necessita, proprio tramite GUOUT, di rielaborare tutte le informazioni *registrate* nella fase di *tracking*. Infatti queste si trovano, diciamo per semplificare, in tre aree di memoria distinte, corrispondenti alla suddivisione di tutto il rivelatore nei tre componenti principali descritti precedentemente (§ 4.4.1, pag. 77). Si intuisce che in ciascuno dei tre gruppi, gli hit sono ordinati cronologicamente, ma non è detto che ci sia una relazione di ordinamento temporale tra gli hit di un gruppo con quelli di un altro, come è mostrato, per esempio, nella figura 4.15: la traccia prima attraversa le camere (hit in colore magenta), poi attraversa qualche striscia interna (hit in colore rosso), successivamente colpisce qualche barretta esterna (hit in colore blue), di nuovo qualche striscia e ancora qualche barretta. Quindi il programma riordina cronologicamente gli hit di tutti i gruppi in modo che, per ogni evento, si abbia l'esatta sequenza di hit, e gli assegna un codice identificativo così da poter sempre identificare dove essi si sono prodotti. Tutto ciò rende più semplice ricostruire la *storia* dell'evento (anche per fini di *debugging*) e facilita la redistribuzione delle informazioni tra il *file degli eventi* e quello delle *ntuple*.

¹⁴ In effetti vengono utilizzati i primi due hit.

4.5 IL PROGRAMMA DI *ricostruzione*

Come il [MC](#), anche il programma di [RC](#) è scritto in [FORTRAN](#). Poiché si tratta, fondamentalmente, di un programma per la ricerca dei minimi di funzioni, anziché scrivere dei nostri sottoprogrammi allo scopo, abbiamo preferito utilizzare quelli di librerie già consolidate quali [MINUIT](#) [[James, 1998](#)]. Questa libreria fa parte del gruppo più ampio di [CERNLIB](#) ed è stata concepita per trovare il minimo di funzioni multi-parametriche.

Breve introduzione a MINUIT

Una vasta classe di problemi, in differenti aree di ricerca, possono essere ricondotti al problema di trovare il più piccolo valore che una funzione, dipendente da uno o più parametri, può assumere. L'esempio più noto è quello della stima dei parametri sconosciuti di una teoria scientifica attraverso la minimizzazione della differenza (il *chi-quadrato*) tra teoria e dati sperimentali. La teoria può essere idealmente rappresentata da una funzione $f(\alpha)$, in cui $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ sono i parametri sconosciuti.

Non è necessario conoscere la funzione $f(\alpha)$ analiticamente, ma è sufficiente avere un metodo per poter calcolare ogni suo valore in corrispondenza di qualunque punto α dello *spazio dei parametri*. Se tale spazio è limitato da restrizioni fisiche, abbiamo quello che è noto come problema di *minimo condizionato*. In certi casi può essere utile fornire qualche informazione aggiuntiva, come i valori numerici delle derivate $\partial f / \partial \alpha$ (il *gradiente*) in ogni punto α dello spazio parametrico, oppure le espressioni analitiche per calcolarle. La minimizzazione viene sempre eseguita calcolando $f(\alpha)$ ripetutamente in punti differenti così come sono determinati dall'algoritmo di minimizzazione, fino a che si raggiunge qualche minimo.

In questo caso, l'utente può sentire la necessità di avere un'idea della soluzione che ha trovato. Per esempio, quanto rapidamente cresce la funzione $f(\alpha)$ allontanandosi dal minimo, α_{\min} . Questa è la fase che i fisici chiamano *analisi dell'errore*.

Una complicazione nella ricerca del minimo è costituita dal caso in cui la funzione presenta più di un minimo (i cosiddetti *minimi locali*). In questa situazione l'utente deve decidere se è necessario conoscere la posizione di ogni minimo o se è sufficiente la conoscenza di quello globale.

La libreria [MINUIT](#) è un sistema di sottoprogrammi in grado di risolvere i problemi sopra delineati. In linea di principio, [MINUIT](#) è stato progettato per gestire qualunque funzione $f(\alpha)$ e può soddisfare le esigenze degli utenti più disparati. Risulta evidente che se un utente lavora spesso con una classe molto ristretta di funzioni, è probabile che scrivendo delle routine specifiche per il suo problema, il processo di minimizzazione risulti più rapido ed efficace. Anche in questo caso, però, [MINUIT](#) offre un valido ambiente in cui l'utente può inserire le proprie routine.

All'utente *normale* [MINUIT](#) consente, con un unico programma, di affrontare la minimizzazione di funzioni di diverso genere. Infatti la libreria mette a disposizione fondamentalmente tre routine di minimizzazione: [SEEK](#), [SIMPLX](#) e [MIGRAD](#). Esse possono essere caratterizzate sinteticamente come segue:

- [SEEK](#), è una routine che ricerca il minimo con metodi di Monte Carlo. Essa può essere utilizzata all'inizio di un fit, quando non si ha una sufficiente conoscenza di un buon punto di partenza. Anche quando si sospetta che ci possa essere più di un minimo è utile impiegare questa

routine. Non ci si deve aspettare, comunque, che ci sia una *convergenza* nel senso *classico*.

- SIMPLX, è una routine di minimizzazione che utilizza il metodo del *simplexso* [Nelder e Mead, 1965].¹⁵ Si tratta di un algoritmo molto *sicuro* e abbastanza rapido anche quando si è lontani dal minimo. Può essere usato per la convergenza verso il minimo esatto. Fornisce le stime degli ordini di grandezza sugli errori dei parametri.
- MIGRAD, è un sottoprogramma per la minimizzazione basato sul cosiddetto *metodo a metrica variabile* [Fletcher, 1970]. Il procedimento è molto veloce in prossimità del minimo o in ogni regione in cui la funzione ha andamento *quasi-quadratico*; se però la funzione ha un comportamento irregolare il metodo è estremamente lento. Esso utilizza le derivate prime della funzione, le quali sono fornite dall'utente o stimate da MINUIT.

Nella libreria è codificato anche qualche *automatismo*, nel senso che, se ad esempio per qualche ragione MIGRAD fallisce, allora viene chiamata la routine SIMPLX per compiere un ulteriore tentativo. Oltre a ciò, è possibile *guidare* la minimizzazione o articolare in più *step* attraverso l'uso dei comandi FIX, RELEASE e RESTORE i quali permettono che un parametro variabile possa essere mantenuto fisso ad un certo valore oppure che riacquisti lo *status* variabile tra uno step e l'altro. Si può anche forzare un parametro libero a variare entro un dato intervallo durante la minimizzazione.

Nei fit che abbiamo eseguito con il programma di RC e che saranno descritti nelle pagine che seguono, il nostro metodo è stato quello di utilizzare in un primo tempo SIMPLX per localizzare il minimo, e poi di *rifinire* la ricerca con MIGRAD.

4.5.1 Strategia della ricostruzione

Lo scopo principale del nostro programma di RC è quello di ricostruire le coordinate $V = (x_V, y_V, z_V)$ del vertice del decadimento del muone e l'impulso, \mathbf{p}_e , del positrone negli eventi $\mu \rightarrow e\gamma$. Per fare questo utilizza i dati forniti dal MC. Da essi si ricavano le coordinate *spazio-temporali* dei punti di intersezione della traccia con le camere (*hit*). Questi punti li possiamo chiamare i punti *misurati* o *sperimentali*, $P_i^{(m)} = (x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i = 1, \dots, N_{\text{hit}}$. Il problema è quello di determinare V e \mathbf{p}_e in modo che la corrispondente traiettoria sia la migliore passante per tali punti (*best fit*). Ciò si ottiene ricorrendo alla tecnica dei *minimi quadrati* [Eadie et al., 1971].¹⁶

La complicazione è che non abbiamo un modello analitico della traiettoria. Infatti il nostro campo è a gradiente e tutto quello che possiamo fare è una stima dei nostri parametri e generare una traccia integrando numericamente le equazioni del moto. La traiettoria così generata, incontrerà le camere nei punti $P_i^{(t)} = (x_i, y_i, z_i, \tau_i)$ che possiamo chiamare i punti *teorici* o *aspettati*, con i quali si può costruire lo *scarto quadratico totale*

$$\chi^2(V, \mathbf{p}_e) \approx \sum_i [(x_i - \xi_i)^2 + (y_i - \eta_i)^2 + (z_i - \zeta_i)^2].$$

¹⁵ Il *simplexso* in uno spazio n -dimensionale è un *politopo* con il minor numero di vertici: un *punto* nello spazio a dimensione zero, un *triangolo* nel caso bidimensionale, un *tetraedro* in quello tridimensionale e così via. Il *politopo* è l'evoluzione della definizione di poligono o poliedro applicata allo spazio n -dimensionale.

¹⁶ Tale tecnica è stata *inventata* nel 1801 da C. F. Gauss per calcolare l'orbita di Cerere, il pianetino scoperto il 1° Gennaio 1801 dall'abate Piazzi [Gauss, 1874].

Al variare di V e \mathbf{p}_e varierà anche χ^2 , per cui le nostre grandezze ricostruite, V^{rec} e $\mathbf{p}_e^{\text{rec}}$, saranno quelle che determineranno il minimo di χ^2 ,

$$\chi^2(V, \mathbf{p}_e) \geq \chi^2(V^{\text{rec}}, \mathbf{p}_e^{\text{rec}}).$$

La traccia relativa sarà quella che meglio approssima i punti sperimentali, $\mathbf{p}_i^{(m)}$. I paragrafi che seguono sono dedicati ad illustrare come il programma di RC sviluppa questa strategia.

4.5.2 Inizializzazione

Il programma ha una fase di inizializzazione generale in cui:

- carica in memoria la mappa del campo magnetico necessaria per generare la traiettoria;
- acquisisce i dati sulla geometria delle camere e del sistema del TOF; prevalentemente il programma di RC deve conoscere lo spazio occupato radialmente e in z di questi oggetti, così da poter determinare le intersezioni della traiettoria con essi;
- inizializza le strutture dati necessarie per memorizzare i risultati, in particolare le grandezze ricostruite per ogni evento.

Bisogna precisare che, contrariamente al MC, qui si usa una *stilizzazione* piana per le camere e cilindrica per i TC.

Successivamente passa ad acquisire i dati forniti dal MC. Questi consistono soprattutto nelle coordinate degli hit con le camere e i tempi d'impatto in cui si sono verificati.

Come abbiamo visto, gli elementi sensibili delle camere sono le celle AGAL descritte in precedenza (§ 4.4.1, pag. 71). Quando la traccia attraversa un singolo settore del sistema delle camere, ognuna delle celle sfalsate produce un hit. Quindi l'*hit* con una camera consiste in realtà in una coppia di punti i quali, dopo essere stati acquisiti dal programma di RC, sono sostituiti dal valor medio: questo sarà il punto *misurato*, $\mathbf{p}_i^{(m)}$, utilizzato nel fit. Naturalmente tra gli eventi del MC ce ne sarà sempre qualcuno che colpirà di striscio le camere producendo un hit in una sola cella: un tale hit viene semplicemente ignorato; non l'evento, però, che potrebbe fornire hit utili sulle altre camere (per esempio, la traccia potrebbe colpire pienamente le prime camere e di striscio l'ultima: i primi hit sarebbero sempre utili, in ogni caso).

Poiché il campo magnetico non è omogeneo, la traccia non è un elica, al più la possiamo considerare come un'elica distorta, sia nel passo che nel raggio di curvatura. Indubbiamente però il tratto di traccia corrispondente al primo giro è quello che più si può considerare un elica, e per una stima iniziale dei parametri da ricostruire, si utilizzerà proprio tale approssimazione. Quindi il fit sarà eseguito utilizzando solo gli hit del primo giro della traiettoria.

Se N_{tot} e N_{1g} indicano, rispettivamente, il numero di hit totali e quelli corrispondenti al primo giro, è evidente che l'intervallo di tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 2, \dots, N_{1g}$, tra due hit consecutivi del primo giro è inferiore all'intervallo tra l'ultimo hit, $t_{N_{1g}}$, e il primo del secondo giro, $t_{N_{1g}+1}$,

$$\Delta t_i \ll \Delta t_{N_{1g}+1} = t_{N_{1g}+1} - t_{N_{1g}}$$

Questo ci permette di filtrare gli hit sulle camere e utilizzare solo quelli del primo giro.

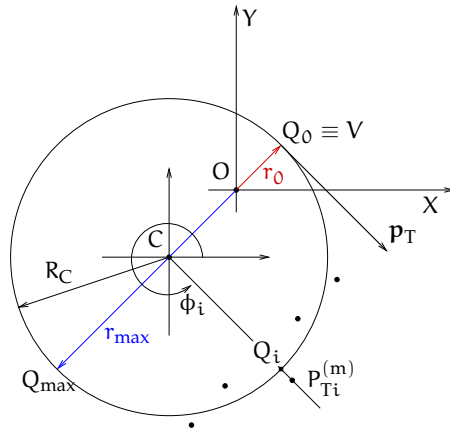


Figura 4.17: Il fit per determinare $C = (x_C, y_C)$ e R_C

4.5.3 Ricostruzione

A questo punto può iniziare la fase di ricostruzione dell'evento vera e propria. Come abbiamo detto questa consiste nel minimizzare lo scarto totale tra gli hit misurati e quelli teorici. Qui non vogliamo sviluppare la trattazione completa della ricerca dei minimi (che si può approfondire in appositi testi [Press et al., 1992] e a cui, tra l'altro, abbiamo già fatto cenno), ma vogliamo accennare brevemente alla problematica di base.

In generale nella ricerca del minimo di una funzione è necessario avere un punto di partenza che *inneschi* il procedimento. Ad esempio, se è possibile calcolare il gradiente, cioè la direzione in cui la funzione cresce, allora, muovendosi in direzione opposta è possibile, a passi successivi, raggiungere il minimo. Il problema, però, è che se il punto di partenza non è sufficientemente vicino al minimo c'è il rischio che tutto il procedimento fallisca, non converga, oppure che converga verso un altro minimo, non quello cercato (se, per esempio, la funzione ha più minimi).

Questo ci fa comprendere che per avere una buona garanzia che il procedimento di ricerca del minimo abbia successo è bene avere una buona stima dei parametri da ricostruire. Nel caso nostro, i parametri da ricostruire sono 5, e cioè:

- la quantità di moto assoluta del positrone, $p = |\mathbf{p}_e|$;
- l'angolo λ (*dip angle*) che l'impulso \mathbf{p}_e del positrone forma con il piano XY; λ è il complementare dell'angolo polare θ , $\lambda + \theta = \pi/2$; la componente trasversa dell'impulso p_T si esprime tramite p e λ con $p_T = p \cos \lambda$;
- l'angolo azimutale ϕ_p dell'impulso del positrone;
- le coordinate sul piano XY, x_V e y_V , del vertice di decadimento; poiché il decadimento avviene nella targhetta, e questa è molto sottile ($\sim 100 \mu\text{m}$) ed inclinata di 22° rispetto all'asse Z, la coordinata z_V del vertice non è indipendente, cioè $x_V = z_V \tan 22^\circ$, oppure $z_V = x_V \cotg 22^\circ$.

Per poter stimare questi parametri, faremo l'ipotesi che l'arco di traiettoria corrispondente al primo giro sia quello di un'elica con asse parallelo all'asse Z.

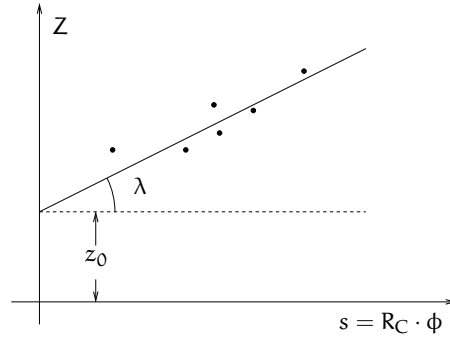


Figura 4.18: Il fit per determinare $d_0 \equiv \tan \lambda$ e z_0

Ricostruzione dell'elica

Con l'ipotesi citata, la proiezione dell'elica sul piano trasverso, XY , è un cerchio il cui centro lo indichiamo con $C = (x_C, y_C)$, e il cui raggio con R_C . Essa è rappresentata schematicamente nella figura 4.17. I parametri di questa circonferenza possono essere determinati con un *best fit* dei punti $P_{Ti}^{(m)} = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N_{lg}$, che sono la proiezione sul piano trasverso degli hit *misurati*. Se indichiamo con ϕ_i la loro coordinata angolare riferita ad un sistema di assi cartesiani la cui origine è nel centro C della circonferenza, i parametri cercati sono quelli che minimizzano la funzione

$$f(x_C, y_C, R_C) = \sum_i [(x_i - \xi_{Ci})^2 + (y_i - \eta_{Ci})^2],$$

in cui

$$\xi_{Ci} = x_C + R_C \cos \phi_i \quad \eta_{Ci} = y_C + R_C \sin \phi_i$$

sono le coordinate dei punti *teorici*, Q_i , sulla circonferenza (fig. 4.17). Per poter inizializzare il procedimento di fit, abbiamo bisogno delle stime dei valori iniziali di x_C , y_C e R_C . Per ottenere ciò, dobbiamo immaginare il processo di fit come una circonferenza che si *muove* nel piano XY *variando* il suo raggio finché la funzione scritta sopra non assume il valore minimo. Allora possiamo considerare una circonferenza iniziale centrata nell'origine del nostro sistema di riferimento (cioè con $x_C^{(0)} = y_C^{(0)} = 0$) e con raggio iniziale uguale a quello della traiettoria di un positrone con impulso di 52.8 MeV/c che si muove in un campo magnetico di intensità $B_0 = 1.26 \text{ T}$,¹⁷ cioè

$$R_C^{(0)} \approx \frac{p(\text{MeV}/c)}{3 \cdot B_0(\text{T})} \approx 15 \text{ cm}.$$

L'acquisizione di (x_C, y_C, R_C) ci permette di calcolare r_{\max} , la distanza radiale massima che l'elica ha dall'asse Z . Questo dato ci tornerà utile per le stime di $d_0 \equiv \tan \lambda$ e p .

Sempre nell'ipotesi di poter approssimare la traccia con un arco di elica al primo giro, possiamo immaginare di *srotolarla*, ottenendo come noto una linea retta. Questo è riportato nella figura 4.18, in cui $s = R_C \phi$ è l'ascissa

¹⁷ Come si ricorderà (§ 3.3, pag. 47) questo valore è quello del nostro campo nell'origine del sistema di riferimento.

curvilinea sulla circonferenza (ϕ è l'angolo di rivoluzione attorno all'asse). L'equazione dell'elica, in questa rappresentazione, è semplicemente

$$z(s) = z_0 + \tan \lambda \cdot s = z_0 + d_0 s.$$

Per determinare i parametri (z_0 , d_0) di questa equazione è sufficiente un fit lineare. In questo caso possiamo assumere come valore iniziale $z_0^{(0)} = 0$, mentre per d_0 possiamo procedere come segue. Se il campo fosse rigorosamente uniforme, il punto alla distanza

$$r_{\max} \equiv \sqrt{(x_C)^2 + (y_C)^2} + R_C \quad (12)$$

sarebbe diametralmente opposto al punto iniziale V dell'elica (il punto Q_{\max} della figura 4.17), cioè $s(r_{\max})$ corrisponde a metà circonferenza, πR_C . Per cui indicando con $z(r_{\max})$ la coordinata z del punto più distante da Z si avrebbe

$$z(r_{\max}) - z_0^{(0)} = d_0^{(0)} s(r_{\max}) = d_0^{(0)} \pi R_C,$$

e poiché stiamo assumendo $z_0^{(0)} = 0$, si ha

$$d_0^{(0)} = \frac{z(r_{\max})}{\pi R_C}.$$

Per $z(r_{\max})$ si può assumere la coordinata z dell'hit più distante dall'asse Z.

Il calcolo di (z_0 , d_0) ci consente di assumere $z_V^{(0)} = z_0$ e $\lambda^{(0)} = \arctan d_0$, mentre il fatto che la coordinata x_V del nostro vertice è legata a z_V da $x_V = z_V \tan 22^\circ$, ci permette di avere anche la sua stima corrispondente. Per y_V , invece, possiamo assumere il valore $y_V^{(0)} = 0$, dato che in ogni caso, viste le dimensioni della targhetta (4 cm in y), la traccia ha origine in prossimità dell'origine.

Con la determinazione dei parametri fin qui fatta, possiamo calcolare anche la stima per ϕ_p . Infatti, poiché ϕ_p è l'angolo ϕ di p_T nel vertice V, esso è semplicemente l'angolo ϕ_C , del centro della circonferenza, aumentato di $\pi/2$ (basta osservare la figura 4.17 per rendersene conto). In sintesi,

$$\begin{aligned} \phi_p^{(0)} &\equiv \phi_C + \frac{\pi}{2} \\ \phi_C &= \arctan \left(\frac{y_C - y_V^{(0)}}{x_C - x_V^{(0)}} \right). \end{aligned}$$

La stima dell'impulso

Rimane da stimare p , la quantità di moto assoluta del positrone. In questo caso ricorriamo a due principi fisici: la *conservazione del momento angolare generalizzato* e l'*invarianza adiabatica*.

Nel primo caso, si può dimostrare che per una particella di carica q in moto in un campo magnetico a simmetria assiale,¹⁸ il momento angolare generalizzato è conservato, cioè

$$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{P})_z = p_T r \sin \alpha + q r A_\phi = \text{cost.}, \quad (13)$$

¹⁸ Per un approfondimento si può consultare il *Cern Yellow Report* 81-06 [Eichinger e Regler, 1981] e [Birsá et al., 1977]

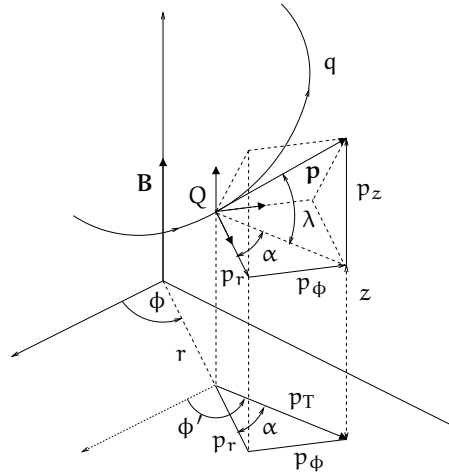


Figura 4.19: Moto in un campo a simmetria assiale

dove abbiamo indicato, rispettivamente, con $\mathbf{p} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$, il raggio vettore e la distanza radiale dall'asse Z, di un punto $Q(x, y, z)$ della traiettoria; $\mathbf{P} = \mathbf{p}_e + q\mathbf{A}$ è la quantità di moto generalizzata; α è l'angolo tra la componente trasversale dell'impulso, \mathbf{p}_T , e la linea radiale $\mathbf{r} = (x, y, 0)$; A_ϕ è la componente cilindrica del potenziale vettore.¹⁹ Introducendo l'angolo azimutale ϕ di Q , e quello ϕ' di \mathbf{p}_T , possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= (r \cos \phi, r \sin \phi, z) \\ \mathbf{p}_e &= (p_T \cos \phi', p_T \sin \phi', p \sin \lambda) \\ \mathbf{A} &= (-A_\phi \sin \phi, A_\phi \cos \phi, 0),\end{aligned}$$

con $|\mathbf{A}| = A_\phi$ (le linee di flusso di \mathbf{A} sono circonferenze concentriche con l'asse Z) e $\phi' - \phi \equiv \alpha$. Alcune di queste grandezze sono illustrate schematicamente nella figura 4.19.

Per quanto riguarda l'invarianza adiabatica, invece, si può dimostrare che per una variazione lenta delle condizioni del moto (stiamo assumendo un arco di elica nel primo giro), gli invarianti adiabatici restano costanti [Landau e Lifshitz, 1978a], cioè

$$I = \frac{p_T^2}{B} = \text{cost.} \quad (14)$$

Applicando le equazioni (13) e (14) al punto iniziale, $Q_0 \equiv V$, e a quello diametralmente opposto, Q_{\max} , della traccia,²⁰ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(p_T r \sin \alpha + q r A_\phi)_0 &= (p_T r \sin \alpha + q r A_\phi)_{\max} \\ \left(\frac{p_T^2}{B}\right)_0 &= \left(\frac{p_T^2}{B}\right)_{\max}.\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a p_{T0} , e tenendo conto che $\alpha_{\max} = 90^\circ$, otteniamo

$$p_{T0} = \frac{-q(r_{\max} A_\phi(r_{\max}) - r_0 A_{\phi 0})}{\sqrt{\frac{B(r_{\max})}{B_0} r_{\max} - r_0 \sin \alpha_0}} \quad (15)$$

¹⁹ In generale, in coordinate cilindriche [Amaldi et al., 1986], vale $\mathbf{A} = (A_r, A_\phi, A_z)$; nel nostro caso il campo è tale che $A_r = A_z = 0$.

²⁰ Cioè quello alla distanza r_{\max} !

da cui si ricava $p^{(0)} = p_{T0}/\cos\lambda^{(0)}$.

A questo punto si potrebbe obiettare come mai si è utilizzato il valore 90° per α_{\max} ma non per α_0 . Infatti la componente trasversa dell'impulso è ortogonale alla linea radiale sia nel punto iniziale, V , che in quello a distanza massima, Q_{\max} . Prima di tutto non dobbiamo dimenticare che stiamo cercando i valori dei nostri parametri per inizializzare il fit. In base alla nostra definizione di α , abbiamo

$$\alpha(r_0) \equiv \alpha_0 = \phi'(r_0) - \phi(r_0) = \phi_p^{(0)} - \phi(r_0)$$

$$\phi(r_0) = \arccos\left(\frac{x_V^{(0)}}{r_0}\right), \quad r_0 = \sqrt{(x_V^{(0)})^2 + (y_V^{(0)})^2}$$

Risulta evidente che, quanto più le nostre stime di $\phi_p^{(0)}$ e $(x_V^{(0)}, y_V^{(0)})$ risulteranno buone tanto più il valore di α_0 sarà prossimo a 90° . Oltre a ciò, dobbiamo fare anche un'altra considerazione. La nostra ipotesi che l'arco di traiettoria nel primo giro sia un'elica, e quindi che la sua proiezione sul piano trasverso sia una circonferenza, è vera solo approssimativamente. Infatti basta guardare la figura 4.15 per rendersi conto che la proiezione della traccia è leggermente schiacciata, per cui se l'impulso trasverso è con buona approssimazione ortogonale alla linea radiale nel punto più distante dall'asse Z , l'ortogonalità è un po' più scarsa nel punto iniziale.

Come si vede nella formula (15) compare il potenziale vettore, A_ϕ . Quindi abbiamo bisogno anche della mappa di tale campo. In realtà questa può essere dedotta da quella del campo magnetico B . Infatti esprimendo la definizione $B = \text{rot } A$ in coordinate cilindriche [Amaldi *et al.*, 1986] e tenendo conto della simmetria cilindrica del nostro campo (nota 19, a pagina 92), abbiamo

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_\phi(r, z)}{\partial z}, \quad B_z(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi(r, z)}{\partial r},$$

da cui con banali integrazioni si ricava A_ϕ ,

$$A_\phi(r, z) = A_\phi(r, 0) - \int_0^z B_r(r, z') dz'$$

$$A_\phi(r, 0) = \frac{1}{r} \int_0^r r' B_z(r', 0) dr'. \quad (16)$$

Poiché B_r e B_z sono le nostre mappe calcolate nei nodi di un reticolo $dr \times dz$, gli integrali possono essere calcolati numericamente: ad esempio, con il metodo dei rettangoli o con quello dei trapezi.²¹

4.5.4 Il fit della traccia

A questo punto abbiamo i valori di V e p_e per avviare il processo di fit della traccia. Come già detto, si tratta di minimizzare lo scarto totale tra i

²¹ Considerando che il potenziale vettore ci serve solo per delle stime, sarebbe illusorio calcolarlo con una precisione maggiore, per esempio con lo stesso metodo con cui abbiamo calcolato le mappe per B , e descritto nell'appendice A.

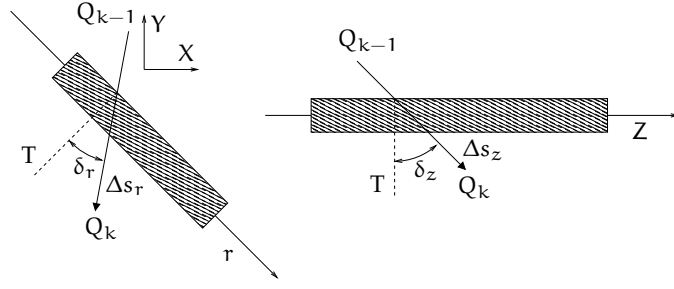


Figura 4.20: Inclinazione della traccia con la dimensione trasversa delle camera

punti *misurati* e quelli *teorici*. Per la precisione la funzione che il programma minimizza è la seguente

$$\chi^2(V, \mathbf{p}_e) = \sum_i \left[\frac{\left(r_i^{(m)} - r_i^{(t)}(V, \mathbf{p}_e) \right)^2}{\sigma_r^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\cos \delta_r} \right)^2} + \frac{\left(z_i^{(m)} - z_i^{(t)}(V, \mathbf{p}_e) \right)^2}{\sigma_z^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\cos \delta_z} \right)^2} \right], \quad (17)$$

dove $r_i^{(m)} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$, $r_i^{(t)} = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$ e $z_i^{(t)} \equiv \zeta_i$, $i = 1, \dots, N_{lg}$. Si tratta di una funzione tipo *chi-quadrato* in cui gli scarti sono *pesati* con le incertezze di misura, cioè le risoluzioni (dell'ordine di $100 \mu\text{m}$) a cui abbiamo fatto riferimento nel § 3.3.2, a pagina 52. Nella precedente espressione si tiene conto anche del fatto che la traccia, come riportato sommariamente nella figura 4.20, attraversa le camere con una certa inclinazione, δ_r e δ_z . Questi angoli sono determinati nella fase di calcolo della traiettoria la quale è ottenuta per punti integrando numericamente le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\mathbf{p}}{p} \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} = C_{00} \frac{\mathbf{p}}{p} \wedge \mathbf{B}, \end{cases}$$

dove s (in cm) è la lunghezza dell'arco di traiettoria, \mathbf{p} (in MeV/c) è la quantità di moto del positrone ($p \equiv |\mathbf{p}|$), $\mathbf{p} \equiv (x, y, z)$ sono le coordinate spaziali (in cm) della stessa particella, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(x, y, z)$ è il campo magnetico (in T) e $C_{00} = 2.99792458$ è la carica elettrica del positrone espressa nelle unità di misura $(\text{MeV}/c) \text{ cm}^{-1} \text{ T}^{-1}$ [Eichinger e Regler, 1981].²² Il metodo utilizzato è quello del 4° ordine di Runge-Kutta [Press et al., 1992]: esso produce i punti $Q_0, Q_1, \dots, Q_k, \dots$ della traccia, che risulta così una linea spezzata i cui segmenti hanno lunghezza Δs (il passo d'integrazione). Quando uno di tali segmenti attraversa una camera ne viene calcolata l'intersezione assumendo per quella la forma stilizzata di un piano (il piano mediano). Il punto così trovato non è altro che uno degli hit *teorici* ($r_i^{(t)}, z_i^{(t)}$) che entrano nel χ^2 da minimizzare.

Le proiezioni, Δs_r e Δs_z , del segmento permettono, invece, di calcolare l'inclinazione della traccia. Infatti, se indichiamo con ϕ_i l'angolo azimutale dell' i -esima camera, con ϕ_T quello del piano trasverso T, con ϕ_r quello

²² Come si riconoscerà, C_{00} non è altro che la mantissa del valore numerico della velocità della luce nel vuoto, c , così come espresso nel Sistema Internazionale (SI).

della proiezione Δs_r e con $Q_{k-1} = (\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \zeta_{k-1})$, $Q_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ gli estremi del segmento Δs , abbiamo $\delta_r \equiv \phi_r - \phi_T$, con $\phi_T = \phi_i - \pi/2$ e

$$\phi_r = \arctan \left(\frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} \right).$$

Nel caso di δ_z , molto più semplicemente abbiamo

$$\zeta_k - \zeta_{k-1} \equiv \Delta s_z \sin \delta_z.$$

Se la traccia non è eccessivamente inclinata possiamo usare anche l'approssimazione $\Delta s_z \approx \Delta s$.

Alla fine del processo di fit, abbiamo per l'evento dato i valori V^{rec} e $\mathbf{p}_e^{\text{rec}}$ che determinano la miglior traccia passante per i punti generati dal MC. Con questa traccia possiamo determinare il tempo d'impatto sui contatori a scintillazione. Questo si può fare calcolando le intersezioni della traccia così ricostruita con le barrette. Se però utilizzassimo la configurazione delle barrette ruotate, gli algoritmi necessari allungherebbero eccessivamente i tempi di esecuzione del programma. Se vogliamo testare le capacità di ricostruzione del nostro programma basta eseguire un *run* del MC con la configurazione *classica* delle barrette, cioè con angolo di rotazione $\gamma = 0$. A questo punto il programma di RC può determinare le intersezioni della traiettoria con la stilizzazione di una superficie d'impatto cilindrica per le barrette.

4.5.5 L'output della ricostruzione

Dopo il fit della traiettoria, come discusso fin qui, si può considerare conclusa la fase di ricostruzione dell'evento corrente. Come per il MC, i dati di questa elaborazione sono organizzati in *ntuple* (§ 4.4.5, pag. 83), le quali vengono salvate in un file per una successiva analisi con PAW [Couet e Goossens, 1999]. Per ogni evento, oltre alle ovvie grandezze ricostruite (p , λ , ϕ , ...) e le analoghe generate dal MC, l'ntupla ne contiene anche altre aggiuntive, quali il minimo che la funzione (17) ha in corrispondenza delle grandezze ricostruite e il numero di hit nel primo giro, N_{1g} . In totale, l'ntupla di ciascun evento contiene oltre 30 grandezze. Una sintesi dei risultati ottenuti sarà mostrata nel capitolo successivo.

E quindi uscimmo a riveder le stelle.

DANTE, *Inferno*, XXXIV 139

Per poter analizzare i file (.hbook) delle ntuple prodotti sia dal MC che dal programma di RC è stato necessario scrivere due apposite *macro* (.kumac) di PAW. Ciascuna di esse produce un file *PostScript* con oltre 150 pagine di figure, costituite essenzialmente da grafici di istogrammi. In questo capitolo vogliamo illustrare i risultati più significativi ottenuti. Essi si riferiscono ai *run* eseguiti su macchine a 64 bit, dotate di sistema operativo Scientific Linux CERN 4 (SLC4) [Cern, 2007] con compilatore FORTRAN, GNU g77 [FSF, 1999].

5.1 RISULTATI OTTENUTI CON IL MONTE CARLO

In tutte le simulazioni effettuate con il MC sono stati generati 10^5 eventi. Alcune prove sono state fatte anche con 10^6 eventi ma ciò non ha portato a differenze significative se non a stressare il sistema nella produzione di file di grande dimensione sia in fase di esecuzione che di analisi, e conseguente allungamento dei tempi complessivi di elaborazione. Come vedremo, per il programma di RC il discorso è totalmente differente.

Nelle figure che mostrano i risultati del MC, come si può vedere, sono presenti delle informazioni aggiuntive, quali in numero di camere utilizzate nella simulazione (NDRC), quello delle barrette esterne TCO (NBAR), il loro angolo di rotazione (γ), la distanza radiale dei loro assi (R_0), le loro dimensioni trasverse (D , L cioè le variabili d e l dell'equazione (7)). Come si ricorderà (§ 4.4.1, pag. 73), nel MC possiamo escludere dalla simulazione il sistema delle strisce TCI: la scritta TWO SLICES OF SCINTILLATOR sta ad indicare invece, che i risultati si riferiscono ad una simulazione completa, con entrambe i sistemi dei contatori a scintillazione (TCI+TCO).

IL CALCOLO DELLE EFFICIENZE DI RIVELAZIONE Come accennato al § 3.3.3, a pagina 53, lo scopo delle barrette esterne è quello di misurare il tempo di volo del positrone. Quindi è naturale domandarsi quanti eventi tale sistema è in grado di registrare (o meglio quanti eventi il nostro MC prevede che possano essere rivelati). Questo dato è calcolato utilizzando il metodo descritto al § 4.4.4 di pagina 82. La macro di PAW che analizza questa parte della simulazione fa una serie di *plot* della grandezza $i_{bL} - i_{bF} + 1$, ognuno dei quali si differenzia per una condizione aggiuntiva (*cut* nel gergo di PAW),

$$i_{bL} - i_{bF} + 1 = 1, 2, 3, \dots$$

cioè quanti eventi hanno 1 barretta colpita (una *singola*), 2 barrette consecutive colpite (una *doppia*), 3 barrette consecutive colpite (una *tripla*) e così via. Questo ci ha permesso di ricavare agevolmente i dati riportati nelle tabelle 5.1 e 5.2

La prima si riferisce ad eventi di Michel ($\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$). In questo caso l'efficienza è tanto più buona quanto minore è il numero di positroni di Michel che giungono sulle barrette. Infatti questo tipo di decadimenti costituisce

Tabella 5.1: Michel isotropi (10^5 eventi generati)

Molteplicità	N. Eventi	N. Eventi (%)
1 barretta	1407	1.4
2 barrette	1565	1.6
3 barrette	906	0.9
4 barrette	185	0.2
5 barrette	18	0.0
Totale	4081	4.1

Tabella 5.2: $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ nell'accettanza del rivelatore (10^5 eventi generati)

Molteplicità	N. Eventi	N. Eventi (%)
1 barretta	14261	14.3
2 barrette	32225	32.2
3 barrette	34369	34.4
4 barrette	12244	12.2
5 barrette	1551	1.6
Totale	94748	94.7

una sorgente di *rumore* che deve essere ridotta quanto più possibile (§ 3.3, pag. 47). Come si vede dalla tabella, l'efficienza complessiva è del 4 % (almeno 1 barretta colpita) ed ha un *picco*, per così dire, intorno a 1.6 %, quando ci sono 2 barrette consecutive ad essere attraversate dalle tracce. Naturalmente questi risultati dipendono dalla scelta accurata della distanza radiale R_0 delle barrette. Se fosse ridotta (ad esempio $R_0 = 31$ cm), si avrebbe, probabilmente, un leggero incremento dell'efficienza dei positroni provenienti dagli eventi di *segnale* ($\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$), ma peggiorerebbe quella dei decadimenti di Michel, che pure aumenterebbero causando il corrispondente incremento di *rumore*. Se invece fosse aumentata (diciamo a 33 cm), si avrebbe sicuramente un abbassamento del rumore ma anche quello dell'efficienza di rivelazione del *segnale*. Da questo punto di vista, possiamo dire che il MC ci ha permesso di stabilire una distanza ottimale per il sistema dei TC di 32 cm. Per ridurre l'effetto negativo dei positroni di Michel, si potrebbe anche pensare di mettere in coincidenza 2 o 3 barrette, cioè di acquisire l'evento solo quando la traccia attraversa 2 barrette (oppure 3). Con 3 barrette ad esempio, il *rumore* sarebbe ridotto a meno dell'1 %, ma purtroppo, l'efficienza sul segnale sarebbe solo del 34 %, come indicato dalla tabella 5.2!

La tabella 5.2 è relativa, invece, alle efficienze degli eventi di segnale. Come si può constatare, l'efficienza complessiva è quasi del 95 % con un *picco* (34 %) quando sono colpite 3 barrette consecutive. In questo caso si potrebbe immaginare di acquisire gli eventi solo se si ha *almeno* una coincidenza doppia (*cut* di PAW $i_{bL} - i_{bF} + 1 \geq 2$) oppure una tripla ($i_{bL} - i_{bF} + 1 \geq 3$). Infatti è ragionevole pensare che quando una traccia attraversa 2 o più barrette consecutive, le attraversi pienamente senza colpirle di striscio o malamente. Ciò implicherebbe che almeno una barretta registrerebbe un segnale *pulito* e, alla luce di quanto abbiamo detto al § 4.4.4 di pagina 82, si otterrebbe un miglioramento della risoluzione sul tempo di volo del positrone. Come

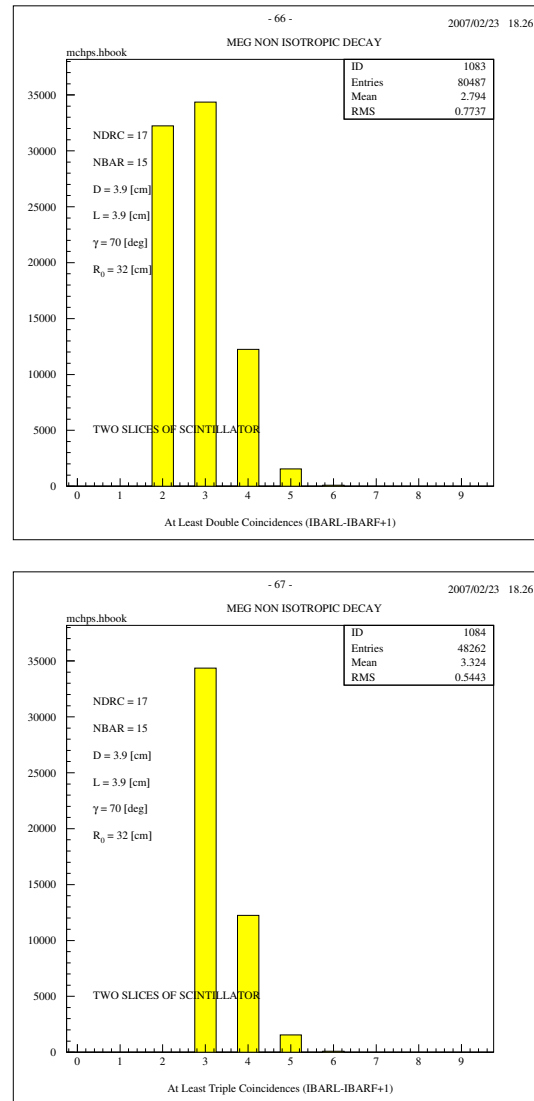


Figura 5.1: Doppie e triple coincidenze

dimostra la figura 5.1, però, l'efficienza totale con *almeno le doppie* scenderebbe a circa l'80 % (e potrebbe ancora essere accettabile), mentre quella delle *triple* finirebbe sotto il 50 % (e non avrebbe più senso usare questa coincidenza).

LA VERIFICA DELLA CURVA DI LANDAU Come noto quando una particella carica attraversa uno strato di materia subisce una perdita di energia per unità di percorso la quale, a causa delle fluttuazioni, ha una distribuzione caratteristica nota come *curva di Landau* [Landau, 1944]. Poiché il MC calcola l'energia che il positrone perde nell'attraversare le barrette (ELOS) e la lunghezza della traccia (SLEN) tra punto d'ingresso e quello d'uscita, abbiamo voluto fare la verifica che, appunto, il nostro dE/dx sia distribuito come una *landau*. Il risultato è mostrato nella figura 5.2 (in cui, tra l'altro, abbiamo utilizzato solo gli eventi che hanno almeno una doppia coincidenza). In effetti questo test è una verifica indiretta di come funziona GEANT!

IL NUMERO DI GIRI DELLE TRACCE L'analisi del tempo d'impatto sulle barrette, cioè del tempo di volo del positrone, ha prodotto il grafico della

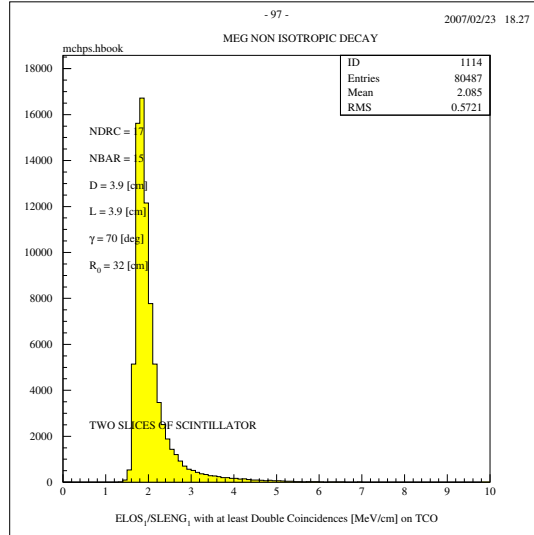
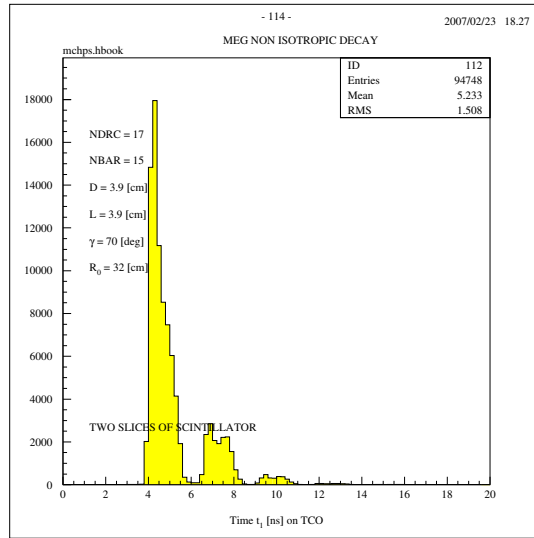
Figura 5.2: dE/dx con le doppie

Figura 5.3: Tempo d'impatto

figura 5.3. In essa vi si notano tre *picchi* ben evidenti ed un quarto, quasi impercettibile, compreso tra 12 ns e 14 ns. Risulta piuttosto intuitivo affermare che ciascuno di questi *picchi* corrisponde al numero di giri che la traccia compie prima di colpire il sistema dei TC.¹ Come è facile verificare, la separazione tra il primo e il secondo picco si ha a 6 ns, cioè gli eventi con

$$t_{\text{imp}} < 6 \text{ ns} \quad (18)$$

corrispondono alle tracce che compiono solo 1 giro prima di *impattare* sulle barrette. In questo caso, è ragionevole ritenere che esse siano quelle di lunghezza minore, e che quindi i corrispondenti eventi siano tra quelli che subiscono gli effetti più limitati di fenomeni quali il multiplo scattering.

¹ Forse sarebbe più esatto dire: il numero di giri + (1/2) circa (fig. 4.15).

LA DISTRIBUZIONE DEL PUNTO D'IMPATTO SULLE BARRETTE Una delle grandezze più interessanti da analizzare è la coordinata z_{imp} del punto d'impatto delle tracce sul sistema esterno dei contatori a scintillazione. Quest'analisi non solo ci permette di stabilire la posizione ottimale lungo l'asse Z delle barrette, ma ci consente anche di fare le considerazioni seguenti.

Come abbiamo già detto (§ 3.3.2, pag. 52), l'accettanza geometrica dell'apparato è definita dall'equazione (1). Qui vogliamo fissare l'attenzione su $|\cos \theta| < 0.35$. Se il MC generasse gli eventi con un tale $\cos \theta$, essi avrebbero la componente $p_z \sim \cos \theta$ equamente ripartita tra valori positivi e negativi. Poiché però anche il nostro spettrometro è speculare rispetto all'asse Z, le distribuzioni dei punti d'impatto sarebbero pure simmetriche. Allora non si ha perdita di generalità se gli eventi sono generati restringendo l'intervallo del $\cos \theta$ ai soli valori negativi. Infatti basterebbe generare un numero di eventi doppio con il $\cos \theta$ in tutto l'intervallo $(-0.35, 0.35)$ per ottenere gli stessi risultati.

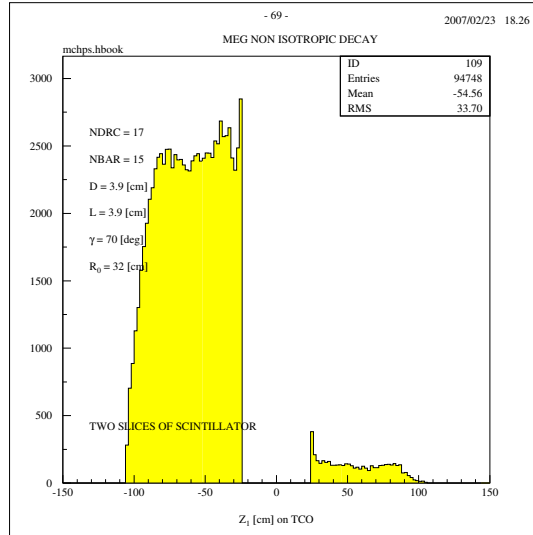
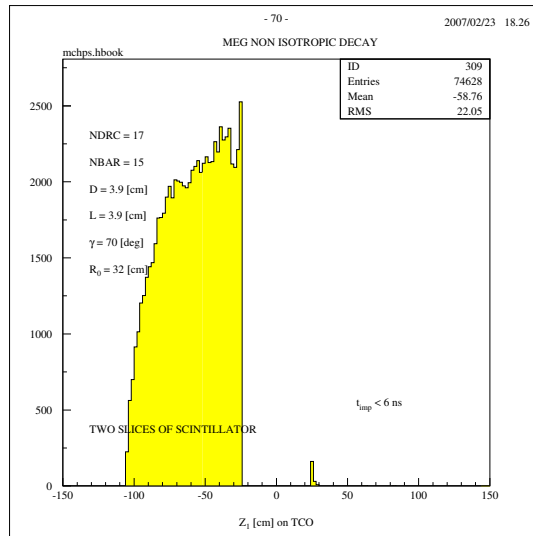
La distribuzione di z_{imp} che abbiamo ottenuto utilizzando solo eventi con $-0.35 < \cos \theta < 0$ è mostrata nella figura 5.4. In essa vi si nota un *fenomeno* che, probabilmente, sarebbe stato più difficile evidenziare se gli eventi fossero stati generati con il $\cos \theta$ nell'intervallo completo. Poiché gli eventi hanno la componente $p_z < 0$, ci aspetteremmo che i positroni spiralizzando in verso orario (per chi guarda da $z > 0$ verso $z < 0$) procedano lungo l'asse Z negativo, e che quindi il punto d'impatto si trovi in tale regione. In realtà, come mostra la figura 5.4a, un limitato numero di eventi, pur avendo una componente p_z negativa, impattano nella regione $z > 0$! Come è possibile che accada una cosa del genere? La nostra spiegazione è la seguente.

Tra gli eventi generati, alcuni avranno i positroni emessi quasi verticalmente, cioè con il $\cos \theta$ prossimo a 0, $p_z \approx 0$ ($p \approx p_T$). Quindi, è sufficiente che essi subiscano un modesto effetto del multiplo scattering affinché acquistino una piccola componente $p_z > 0$. In tal caso, allora, la traccia comincerà a spiralizzare verso la regione $z > 0$. Non solo: anche il *dip angle* (§ 4.5.3, pag. 89) sarà piccolo, cioè la traccia comincerà a spiralizzare con un piccolo passo e, probabilmente, effettuerà diversi giri prima di impattare. Questo è confermato in modo chiaro dall'analisi riportata nella figura 5.4b, in cui abbiamo adottato la condizione (18) per selezionare gli eventi del primo giro. Come si vede, il gruppo di eventi nella regione $z > 0$ viene eliminato quasi completamente.

Se si confrontano le figure 5.4a e 5.4b, notiamo che, mentre la prima ha un andamento quasi *piatto* per $z < 0$, la seconda presenta uno *smussamento*, soprattutto verso $|z|$ maggiori. Infatti se la traccia compie più giri, il punto d'impatto sarà più lontano da quello in cui essa ha origine, cioè eliminare gli eventi con le tracce che compiono più giri significa *tagliare* quelli che hanno un punto d'impatto più lontano. In questo caso, come è facile verificare, l'efficienza complessiva è intorno al 75 %.

LA DISTRIBUZIONE DEGLI ANGOLI D'IMPATTO In base alle ragioni esposte al § 4.4.4, a pagina 82, per ottenere una buona risoluzione sulla misura del tempo di volo del positrone è molto importante che le tracce attraversino le barrette quanto più verticalmente possibile. Nella configurazione originaria (descritta al § 3.3.3 di pagina 53), è intuitivo ritenere che il numero degli eventi soddisfacenti la precedente condizione sia molto limitato. Se invece le barrette vengono ruotate opportunamente, questo numero è destinato ad aumentare. Il problema è quale criterio adottare per fare una tale verifica.

Tenendo conto della 3-dimensionalità della traccia, abbiamo definito tre

**(a) Tutti i giri****(b) Solo un giro****Figura 5.4:** Coordinata z d'impatto su **TCO**

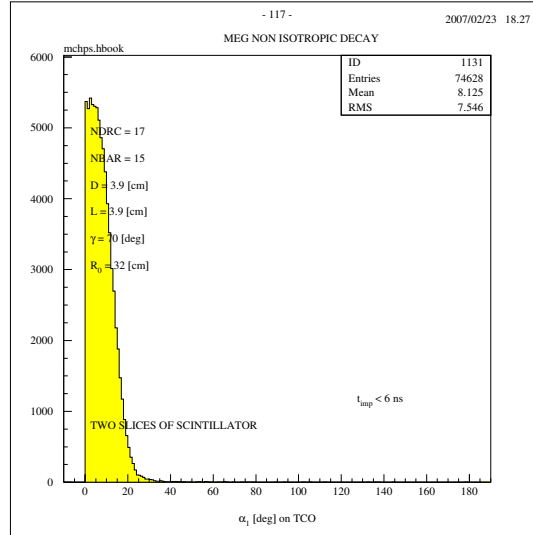


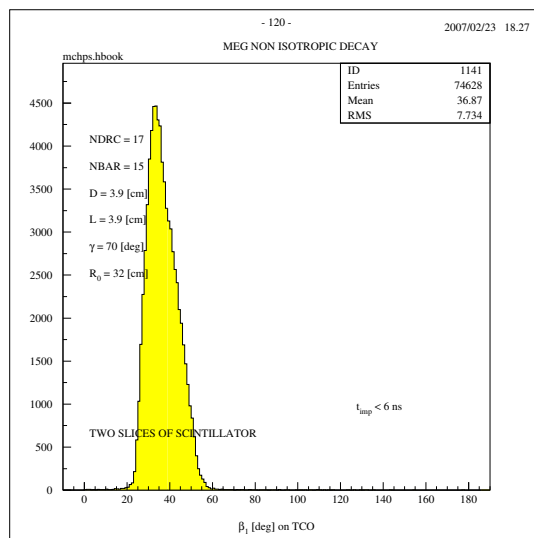
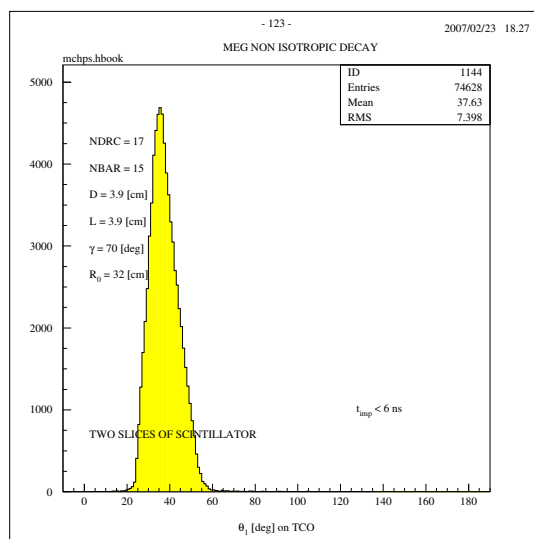
Figura 5.5: Angolo d’impatto α

angoli d’impatto: α , β e θ . Ognuno di essi, in linea generale, è l’angolo che l’impulso del positrone nel punto d’impatto o le sue proiezioni su determinati piani, formano con la normale *esterna* alla barretta (l’asse X_D della figura 4.12). Le definizioni esatte sono riportate nell’appendice D, dove si danno anche le formule con cui il MC calcola i loro coseni.

Con queste definizioni ed avendo istruito il MC per il calcolo di tali angoli, sono state effettuate una serie di simulazioni ognuna con un angolo γ di rotazione delle barrette diverso, e si è cercato di determinarlo in modo che la *forchetta* tra impulso e normale risultasse la meno ampia possibile. I risultati migliori sono stati ottenuti con un angolo $\gamma = 70^\circ$. Le corrispondenti distribuzioni degli angoli d’impatto sono riportate nelle figure 5.5, 5.6 e 5.7. Come si vede, sono stati utilizzati solo gli eventi le cui tracce compiono 1 giro (la condizione (18)), ed il risultato migliore è quello di α , circa 8° . Questo significa che la proiezione delle tracce sul piano trasverso attraversa le barrette quasi verticalmente. Il fatto che non si possa ridurre il valore di β e θ al di sotto dei 37° , dovrebbe essere abbastanza ovvio: le tracce si muovono lungo l’asse Z e quindi presentano sempre una componente in quella direzione, la stessa in cui sono posizionate le barrette! Con un angolo $\gamma = 60^\circ$, i risultati per i tre angoli d’impatto sarebbero stati peggiori di circa 1° .

LA RISOLUZIONE SUL TEMPO DI VOLO Nel MC, in parallelo al calcolo di i_{bF} e i_{bL} , come descritto al § 4.4.4 di pagina 82, eseguiamo anche quello di ciò che potrebbe definirsi la *risoluzione normalizzata* sul *timing*. Infatti, i contatori a scintillazione sono progettati per misurare il tempo con una risoluzione di 105 ps (§ 3.3.3, pag. 53). Ammettiamo, allora, che tale valore corrisponda ad un rilascio 10 MeV nell’attraversamento di una barretta, cioè che la risoluzione singola sia

$$\Delta t_{bi} = (105 \text{ ps}) \frac{10 \text{ MeV}}{\Delta E_{bi}(\text{MeV})},$$

Figura 5.6: Angolo d'impatto β Figura 5.7: Angolo d'impatto θ

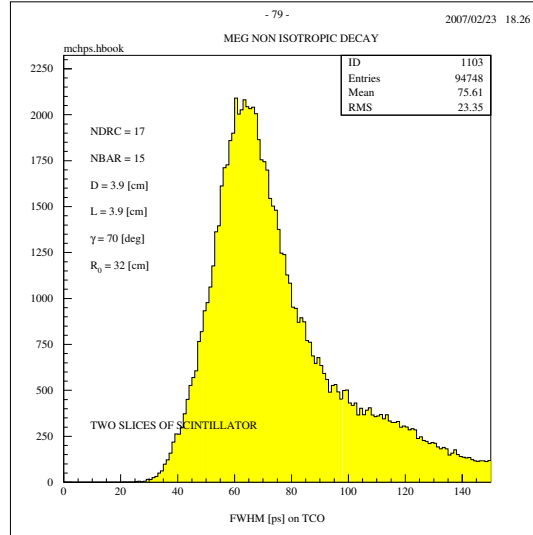


Figura 5.8: Risoluzione sul *timing*

in cui ΔE_{bi} è l'energia *rilasciata* nella barretta i -esima dal positrone. Con questa ipotesi, la risoluzione finale per il singolo evento è determinata dalle leggi della statistica [Eadie *et al.*, 1971],

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} = \sum_i \frac{1}{(\Delta t_{bi})^2},$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le barrette attraversate consecutivamente. L'istogramma di Δt (FWHM) è riportato nella figura 5.8. Come si vede, il suo valore medio è intorno ai 75 ps, cioè, combinando le misure indipendenti delle singole barrette si otterrebbe un miglioramento della risoluzione complessiva.

5.2 I RISULTATI DEL PROGRAMMA DI *ricostruzione*

Come abbiamo accennato nel § 4.5.1, a pagina 87, il programma di *RC* necessita dei dati forniti dal *MC* per poter essere utilizzato. A questo punto si potrebbe pensare di adoperare i *run* del *MC* descritti fin qui anche per la ricostruzione. In effetti, a parte la complicazione delle barrette ruotate (§ 4.5.4, pag. 93), ciò è possibile, solo che i tempi di esecuzione del programma di *RC* sarebbero estremamente lunghi. Infatti, se il *MC* impiega solo pochi minuti per elaborare 10^5 eventi, per la ricostruzione sarebbero necessarie almeno 5 h (su macchina a 64 bit)! Da qui la necessità di eseguire dei *run* specifici del *MC*, da usarsi in combinazione con il programma di *RC*, con soli 10^4 eventi. Bisogna considerare che durante lo sviluppo di questi programmi, i primi test della ricostruzione impiegavano oltre 20 h per ricostruire 10^4 eventi!!!² Successivamente, con l'affinamento degli algoritmi e l'eliminazione di *colli di bottiglia* (ed anche con l'aumento della potenza di calcolo dei calcolatori), i tempi di esecuzione (sempre riferiti a 10^4 eventi) si sono man mano abbassati, fino ad arrivare al valore attuale di circa 30 min.

L'analisi della ricostruzione è riportata nelle figure che seguono. In esse vengono indicate alcune informazioni circa i criteri di selezione degli eventi utilizzati per produrle. In particolare:

- *NDF* indica il *numero di gradi di libertà* del fit di ricostruzione, Number of Degrees of Freedom (*NDF*). In generale *NDF* è la differenza tra il numero di punti *fittati* e quello dei parametri del fit. Nel nostro caso dunque

$$\text{NDF} = N_{1g} - 5,$$

perché 5 sono i nostri parametri da *fittare* (§ 4.5.3, pag. 89). Quindi, $\text{NDF} > 0$ nelle figure sta ad indicare che gli eventi utilizzati negli istogrammi sono quelli le cui tracce sono state ricostruite utilizzando almeno 5 punti (hit) delle camere.

- Naturalmente, non possiamo aspettarci che per tutti gli eventi analizzati il vertice ricostruito sia interno al bersaglio così come per gli eventi generati: ce ne sarà sempre qualcuno che *cadrà* appena fuori dal bersaglio. Nell'analisi della ricostruzione vengono utilizzati *solo* gli eventi che hanno il vertice ricostruito *interno* al bersaglio, da qui l'indicazione: In the target.
- Sulla base del ragionamento esposto nel punto precedente, lo stesso criterio è stato adottato in riferimento all'impulso ricostruito: poiché il *MC* genera eventi con l'impulso del positrone nell'accettanza geometrica del rivelatore (§ 4.4.2, pag. 80), anche nel caso della ricostruzione si utilizzano, nell'analisi, solo eventi con tale caratteristica.
- Un ulteriore affinamento dell'analisi è stato fatto utilizzando gli eventi per i quali la funzione (17) ha un minimo inferiore a 10, $\chi^2 < 10$.

LA RICOSTRUZIONE DEL VERTICE E DELL'IMPULSO I risultati della ricostruzione del vertice di decadimento del muone e dell'impulso del positrone sono riportati nelle figure che seguono (dalla figura 5.9 alla 5.14). In ognuna di esse è stato riportato l'istogramma della differenza tra grandezza generata e quella ricostruita ($\Delta x = x_{\text{gen}} - x_{\text{rec}} \dots$). Solo per la quantità di moto assoluta, si è fatto il grafico di p_{rec} , visto che $p_{\text{gen}} \equiv 52.8 \text{ MeV}/c$. In ciascun

² Con un vecchio PENTIUM-II.

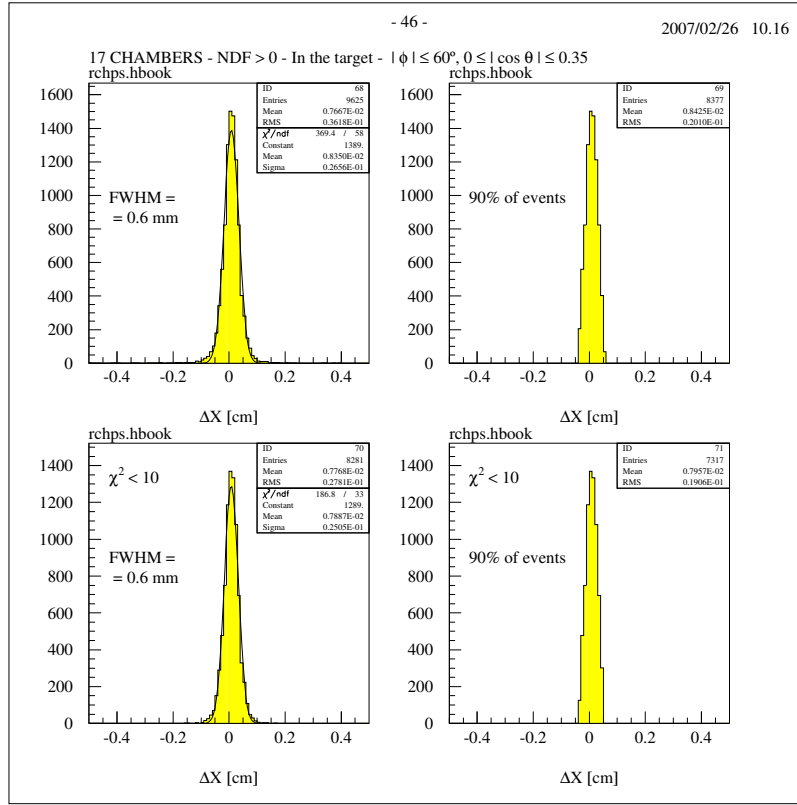


Figura 5.9: Ricostruzione della coordinata x del vertice

caso sono stati eseguiti dei fit gaussiani per meglio determinare le risoluzioni (FWHM) sulle grandezze ricostruite.³ Come si vede l'efficienza è del 96 % e scende all'82 % con una selezione ulteriore ($\chi^2 < 10$) degli eventi.

LA RICOSTRUZIONE DEL TEMPO DI VOLO Se riflettiamo sul fatto che, nella ricostruzione, il fit delle tracce viene effettuato utilizzando solo gli hit del primo giro, giungiamo alla conclusione che, molto probabilmente esso sarà *buono* per la parte iniziale della traccia ma non altrettanto per quella terminale sui TC. Questo ci è confermato dalla figura 5.15, in cui riportiamo l'istogramma della grandezza $\Delta t = t_{\text{gen}} - t_{\text{rec}}$. In essa si nota un forte sparpagliamento di Δt , ed un *cut* a 20 ns non è sufficiente ad eliminare le code. Con un ulteriore taglio a 0.2 ns, si è provato ad effettuare un fit gaussiano i cui risultati sono mostrati nella figura 5.16. Come indica la figura 5.17, un netto miglioramento della risoluzione si ha se invece della *gaussiana* si usa una *breit-wigner*. Infatti questa curva ha una decrescenza meno rapida della gaussiana e quindi riesce a rappresentare meglio le code. Con la gaussiana, il miglioramento si ottiene se si esegue il fit utilizzando gli eventi la cui traccia compie solo un giro prima di impattare sugli scintillatori, ma come riporta la figura 5.18, in questo caso l'efficienza passa dal 56 % al 40 %.

Allo stadio attuale, cioè all'epoca in cui è stata scritta questa tesi, questo rappresenta un grosso problema. Nel frattempo, nell'esperimento, si sta percorrendo una strada migliorativa per la ricostruzione. Al posto di MINUIT si sta utilizzando un *Kalman Filter* [Kalman, 1960], in cui si tiene conto anche dell'informazione contenuta nelle strisce e nelle barrette del Timing Counter.

³ Il legame tra Γ , la FWHM, e σ , la deviazione standard, è ovviamente $\Gamma = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2.35\sigma$

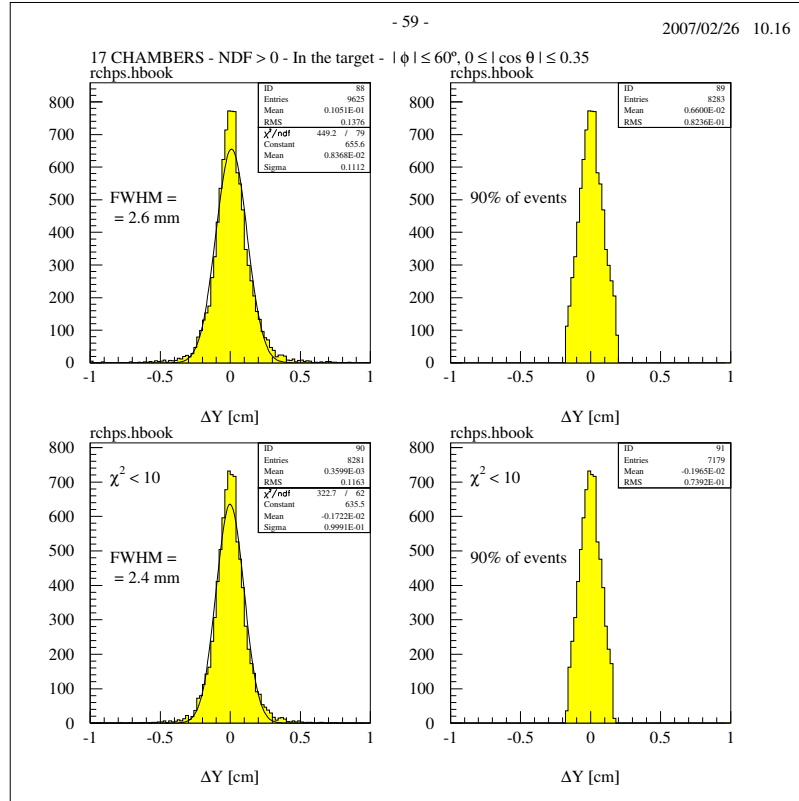


Figura 5.10: Ricostruzione della coordinata y del vertice

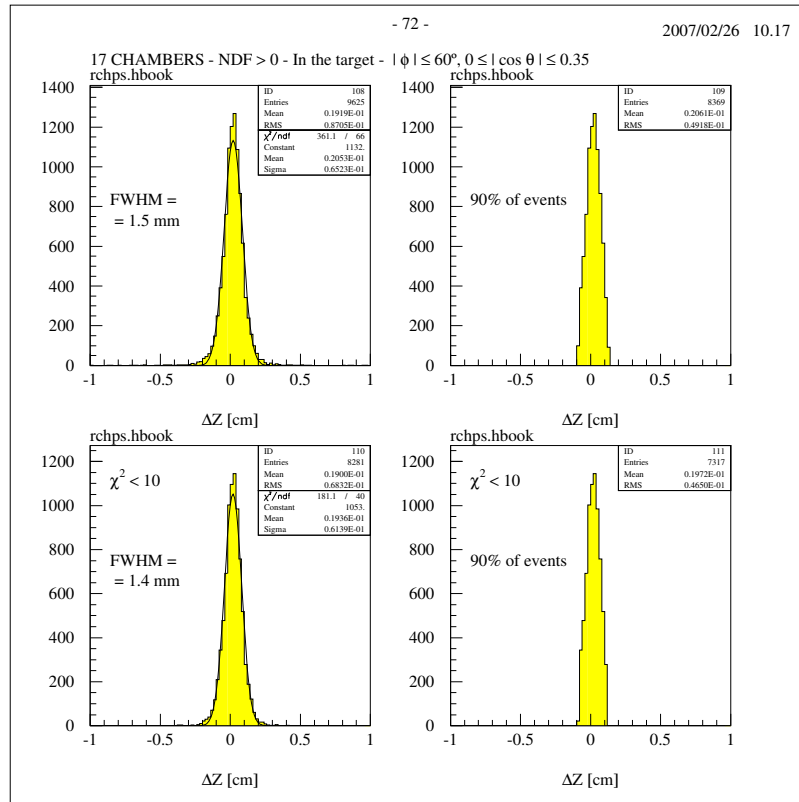


Figura 5.11: Ricostruzione della coordinata z del vertice

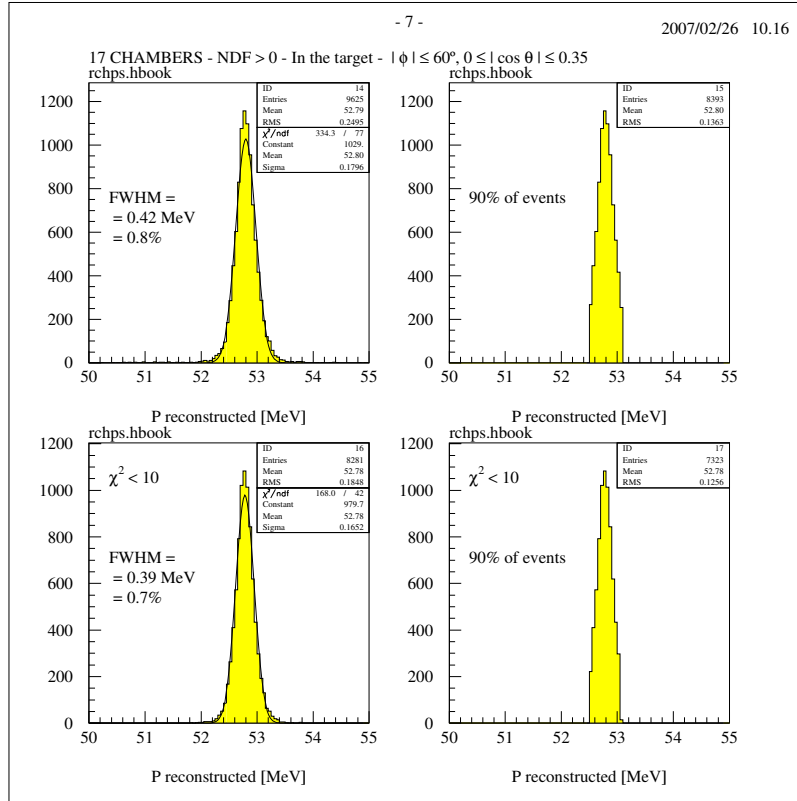
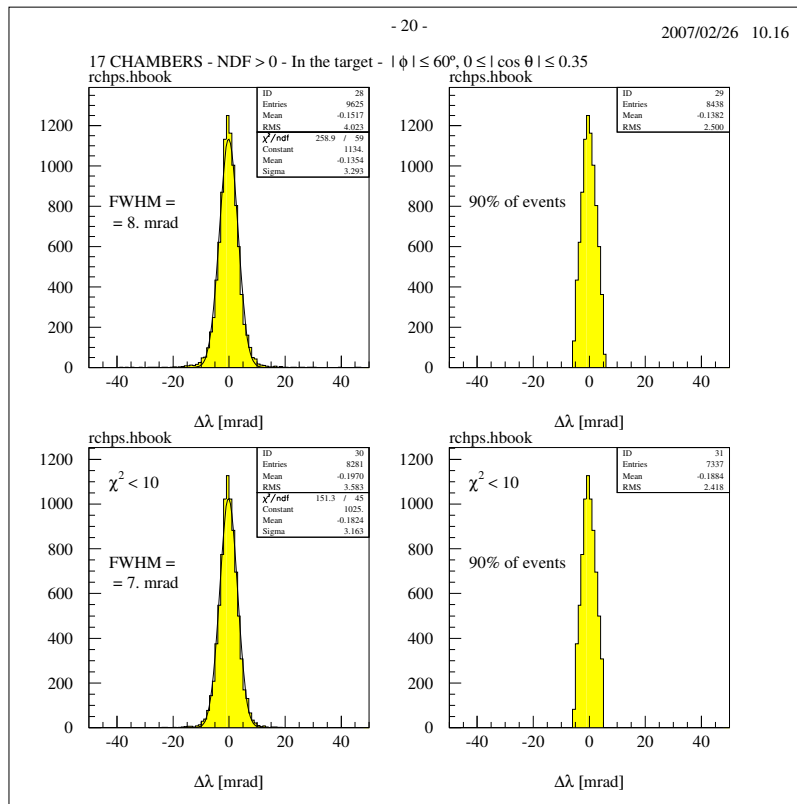


Figura 5.12: Ricostruzione della quantità di moto assoluta del positrone

Figura 5.13: Ricostruzione dell'angolo λ

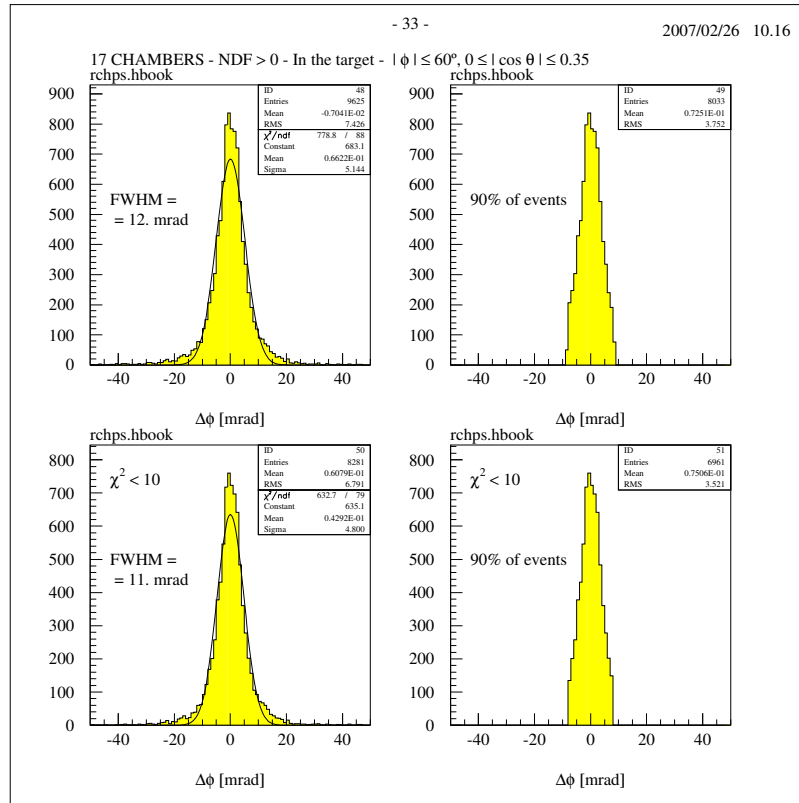
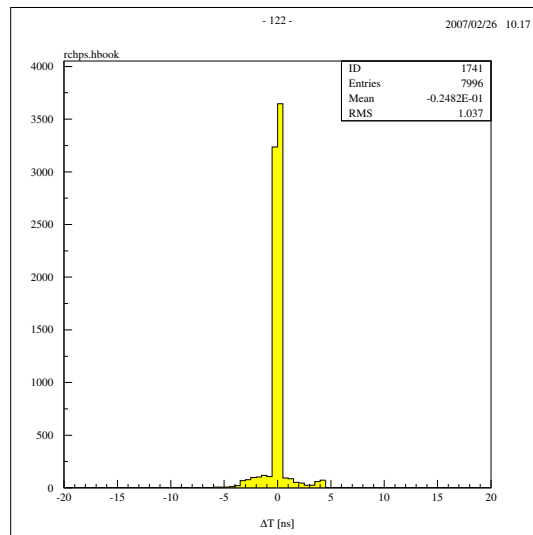
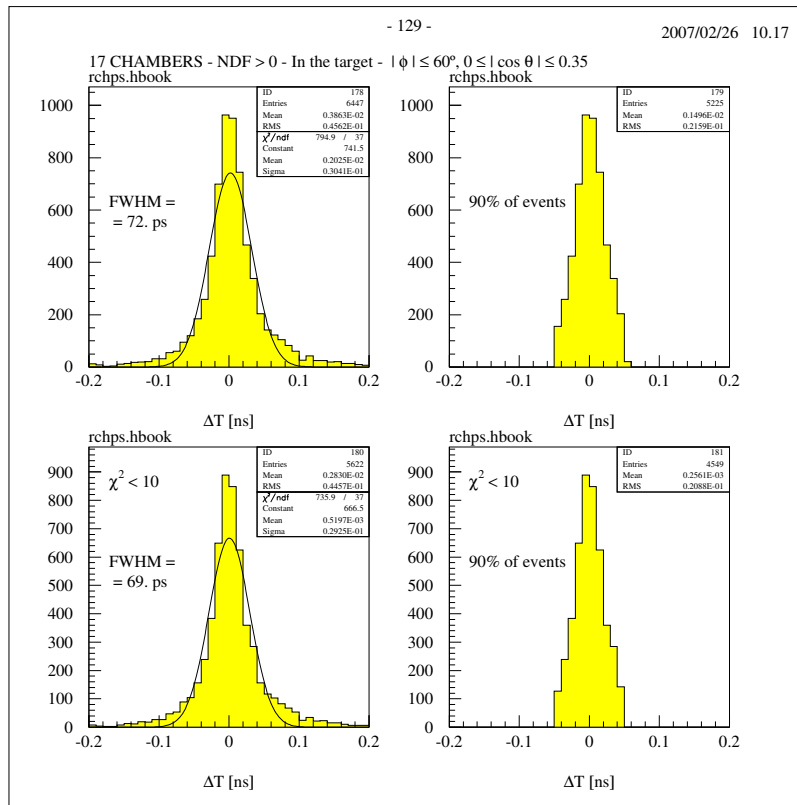
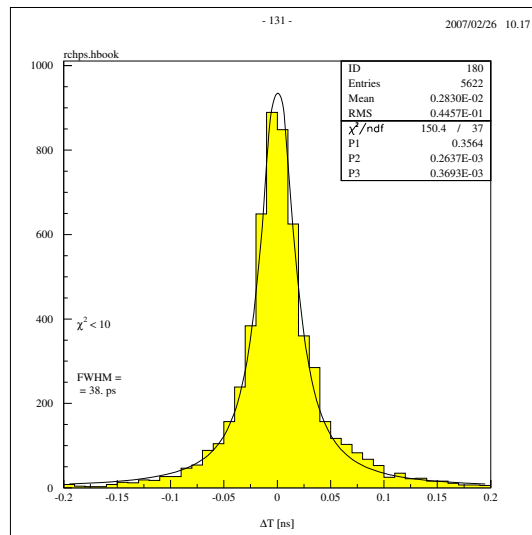
Figura 5.14: Ricostruzione dell'angolo ϕ 

Figura 5.15: Ricostruzione del tempo d'impatto sui TC

Figura 5.16: Ricostruzione del tempo d'impatto con una *gaussiana*Figura 5.17: Ricostruzione del tempo d'impatto con una *breit-wigner*

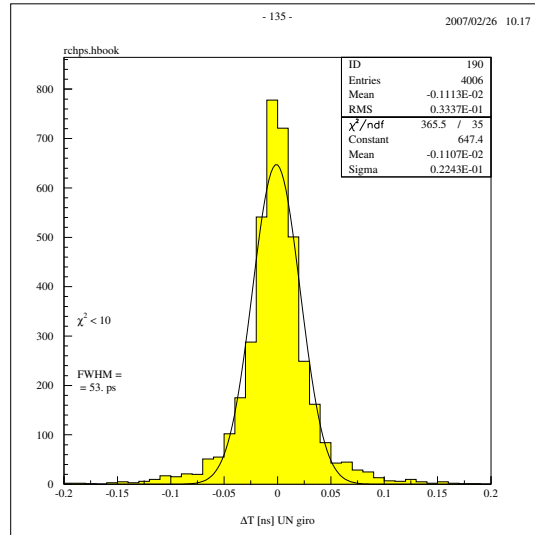


Figura 5.18: Ricostruzione del tempo d’impatto con una *gaussiana* (1 giro)

Come abbiamo accennato al § 3.3.3 di pagina 53, il progetto del sistema dei TC prevede di raggiungere una risoluzione di 105 ps nella misura dei tempi. Quindi, alla luce dei nostri risultati, possiamo valutare l’effetto che la risoluzione della nostra ricostruzione ha su quella finale. Assumendo il nostro risultato *peggiore* (quello della figura 5.16), $\Delta t_{\text{rec}} \approx 70$ ps, abbiamo

$$\Delta t_{\text{finale}} = \sqrt{(70)^2 + (105)^2} \approx 126 \text{ ps}$$

che è un risultato confrontabile con quello di progetto.

5.3 CONCLUSIONI

Nel corso delle pagine precedenti abbiamo visto che, per ottenere successo nella misura di $B(\mu^+ \rightarrow e^+\gamma)$, l’esperimento MEG deve effettuare una misura molto precisa dell’energia delle particelle coinvolte nonché della loro coincidenza temporale e dell’angolo tra i loro impulsi.

Con il nostro MC abbiamo dimostrato che si ha un miglioramento generale delle prestazioni del sistema se le barrette sono ruotate di un angolo di 70° attorno al loro asse. Ciò non solo comporta un incremento complessivo di efficienza rispetto al caso *piatto*, ma anche una risoluzione migliore sul tempo di volo del positrone. Infatti la rotazione delle barrette determina un aumento del volume medio occupato dal sistema dei TC e permette che i segnali luminosi sui fototubi siano meno *sparpagliati*. Inoltre con questa modifica non si ha un peggioramento del flusso di positroni di Michel che giungono sui contatori: esso si mantiene sempre intorno al 4%. Come già abbiamo avuto modo di dire, questi nostri risultati hanno determinato una modifica della geometria iniziale dei TC e l’esperimento in corso di svolgimento presso lo PSI ha adottato la configurazione delle barrette ruotate di 70° .

Buoni risultati si sono ottenuti anche nella ricostruzione. Infatti le risoluzioni che abbiamo ottenuto ($\Delta p/p \sim 0.7\%$, 10 mrad su quella angolare e qualche mm nella ricostruzione del vertice) sono molto simili a quelle riportate nella Proposta [Mori *et al.*, 1999] dell’esperimento e che sono poste a fondamento per una buona riuscita di questo.

Il punto debole, però, come abbiamo evidenziato, sono i tempi estremamente lunghi per la ricostruzione dei singoli eventi (~ 0.2 s/ev.). Nell'esperimento reale, naturalmente, il flusso di dati da elaborare sarà molto più alto e quindi oltre ad un incremento della potenza di calcolo sarà opportuno sviluppare degli algoritmi che riducano notevolmente i tempi di esecuzione. Non solo. Questi devono anche tener conto che nel fit non si potrà utilizzare solo gli hit del primo giro della traiettoria, ma occorrerà anche qualche altro punto, altrimenti la ricostruzione sul tempo di volo sarà estremamente difficile (vedi considerazioni sulla ricostruzione del tempo di volo nel § 5.2, a pagina 106). Un'idea sarebbe quella di utilizzare, oltre ai punti iniziali, anche uno più distante come, ad esempio, quello d'impatto sui TC. Infatti questo punto costituirebbe come un *vincolo* per la traccia e porterebbe sicuramente ad un netto miglioramento nella precisione delle grandezze ricostruite.

In conclusione, le nostre simulazioni ci inducono a ritenere che l'esperimento MEG ha concrete possibilità di successo e che quindi, al termine del suo completamento, sarà data una prova concreta sulla possibilità di una nuova Fisica oltre il Modello Standard.

Parte IV

APPENDICI

IL CAMPO MAGNETICO

Il magnete è sostanzialmente un insieme di spire circolari coassiali, a simmetria cilindrica. Orientando l'asse Z come l'asse del magnete e facendo coincidere il piano XY con il piano mediano, lo spettrometro risulta speculare rispetto a detto piano, esibendo la simmetria $z \rightarrow -z$.¹ Il campo in un punto dello spazio è dovuto alla sovrapposizione dei campi prodotti, nel medesimo punto, dalle singole spire ed è quindi necessario calcolare prima il campo prodotto da una singola spira.

A.1 IL CAMPO DI UNA SPIRA CIRCOLARE

In questo paragrafo illustreremo i punti salienti del calcolo del campo magnetico generato nello spazio da una spira circolare percorsa da corrente. Il calcolo non presenta difficoltà concettuali, ma si articola in lunghe e noiose trasformazioni algebriche atte ad esprimere tutti gli integrali che vi compaiono in termini dei soli integrali ellittici $K(k)$ ed $E(k)$ che, in ultima analisi, sono poi calcolati numericamente con opportuni sottoprogrammi [Shiers e Goossens, 1996].

Supponendo che la spira, di raggio R , sia posizionata sul piano $z = \zeta$ e che il suo asse coincida, ovviamente, con l'asse Z (cioè l'asse del magnete), il campo, in un punto $P(x, y, z)$ dello spazio, è determinato dalla *legge di Biot e Savart* [Becker, 1941] (nota pure come *1^a formula di Laplace* [Amaldi et al., 1986])

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\mathbf{l} \wedge \boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$$

in cui l'elemento lineare $d\mathbf{l}$ ha coordinate (ξ, η, ζ) e componenti $(d\xi, d\eta, 0)$;² $\boldsymbol{\rho}$ è il vettore che va dall'elemento $d\mathbf{l}$ al punto P ed ha componenti $(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$; l'integrale curvilineo è fatto su tutta la spira (fig. A.1).

Indicando con θ l'angolo azimutale di $d\mathbf{l}$ e con ϕ quello di P (fig. A.2), la distanza ρ si scrive

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + R^2 + (z - \zeta)^2 - 2rR \cos(\theta - \phi)} \\ &= Q \left\{ 1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

dove si è indicato con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza radiale di P dall'asse della spira e sono state utilizzate le relazioni

$$\begin{cases} \xi = R \cos \theta \\ \eta = R \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi. \end{cases}$$

¹ Il verso dell'asse Z è scelto in modo da soddisfare la *regola della mano destra*: quando le dita della mano destra si avvolgono nel verso delle correnti, il pollice punta nel verso dell'asse Z.

² $d\zeta = 0$, essendo il piano della spira fisso.

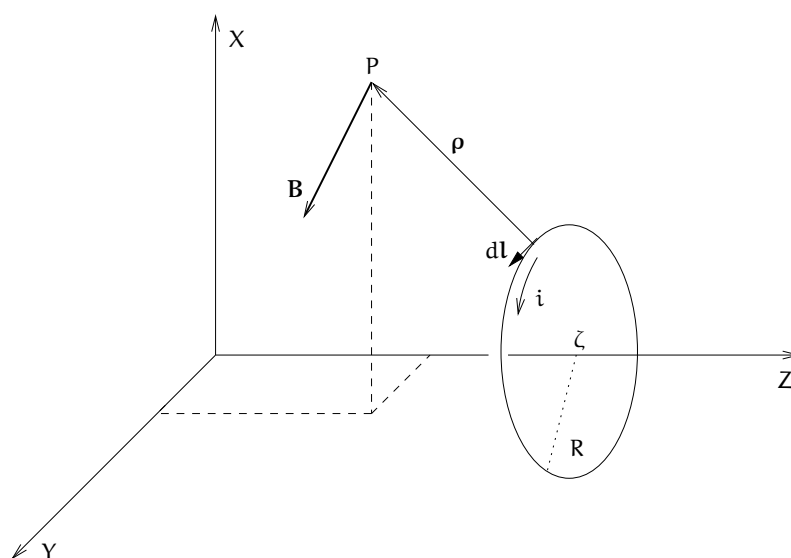


Figura A.1: Le grandezze che figurano nella *legge di Biot e Savart*

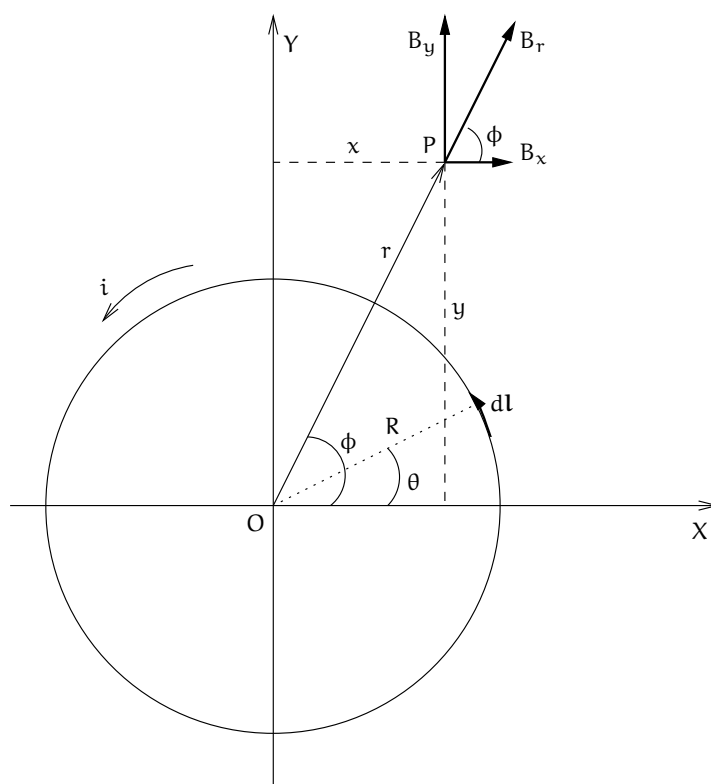


Figura A.2: Proiezione sul piano XY della spira

Inoltre si è posto

$$\begin{aligned} Q &\equiv Q(r, z) = \sqrt{(r + R)^2 + (z - \zeta)^2} \\ k &\equiv k(r, z) = \frac{\sqrt{4rR}}{Q}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ricordando che $d\mathbf{l} \equiv (d\xi, d\eta, 0)$ e $\boldsymbol{\rho} \equiv (x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$, si ha

$$(d\mathbf{l} \wedge \boldsymbol{\rho})_x = d\eta(z - \zeta) = R \cos \theta d\theta(z - \zeta)$$

e la componente B_x del campo risulta

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(z - \zeta)R}{Q^3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\left\{1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Eseguendo il cambiamento di variabile $\theta' = \theta - \phi$, si può riscrivere

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(z - \zeta)R}{Q^3} \int_{-\phi}^{2\pi - \phi} \frac{\cos(\theta' + \phi) d\theta'}{\left\{1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta'}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Poiché la funzione integranda ha periodo 2π , l'integrale può essere calcolato tra 0 e 2π . Inoltre essendo

$$\cos(\theta' + \phi) = \cos \theta' \cos \phi - \sin \theta' \sin \phi,$$

la parte in $\sin \theta' \sin \phi$ non contribuisce. Per cui

$$B_x = \left\{ \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(z - \zeta)R}{Q^3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\left[1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \cos \phi \equiv B_r \cos \phi,$$

avendo rinominato in θ la variabile d'integrazione e avendo posto uguale a B_r l'espressione tra graffe.

Il calcolo di B_y è del tutto analogo e porta al risultato

$$B_y = B_r \sin \phi.$$

Per B_z si ha invece

$$(d\mathbf{l} \wedge \boldsymbol{\rho})_z = d\xi(y - \eta) - d\eta(x - \xi) = [R^2 - rR \cos(\theta - \phi)] d\theta,$$

cioè

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{Q^3} \int_0^{2\pi} \frac{[R - r \cos(\theta - \phi)] d\theta}{\left\{1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Come per B_x , la trasformazione $\theta' = \theta - \phi$ permette di scrivere

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{Q^3} \int_0^{2\pi} \frac{[R - r \cos \theta] d\theta}{\left\{1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

con una rinomina $\theta' \rightarrow \theta$.

Ponendo

$$I(k) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\left\{1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$J(k) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left\{1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

si ha una semplificazione della scrittura

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{(z - \zeta)R}{Q^3} 4I(k) \\ B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{Q^3} 4[RJ(k) - rI(k)]. \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabile, $\theta = \pi - 2\beta$, si ottiene

$$I(k) = -\frac{1}{4} 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\beta d\beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

In questo caso la funzione integranda ha periodo π ed è pari: l'integrale tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ è il doppio di quello calcolato tra 0 e $\pi/2$, cioè

$$I(k) = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\beta d\beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}}. \quad (20)$$

Con la stessa sostituzione si trova

$$J(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}}. \quad (21)$$

Apparentemente, sembra che il calcolo del campo sia ricondotto al calcolo dei due integrali $I(k)$ e $J(k)$, ma come vedremo tra breve, essi *non* sono indipendenti.

A.1.1.1 Il calcolo di $I(k)$ e $J(k)$

Vogliamo far notare che, per α qualunque, vale la seguente *identità*

$$-\frac{\cos 2\beta}{\left(1 - k^2 \sin^2 \beta\right)^\alpha} = \frac{2 - k^2}{k^2} \frac{1}{\left(1 - k^2 \sin^2 \beta\right)^\alpha} - \frac{2}{k^2} \frac{1}{\left(1 - k^2 \sin^2 \beta\right)^{\alpha-1}}.$$

(22)

Allora, assumendo $\alpha = 3/2$, si può verificare facilmente che la funzione integranda di $I(k)$ nella (20) si scrive così

$$-\frac{\cos 2\beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 - k^2}{k^2} \frac{1}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{k^2} \frac{1}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

cioè

$$I(k) = \frac{2 - k^2}{k^2} J(k) - \frac{2}{k^2} K(k) \quad (23)$$

in cui $K(k)$ è l'integrale ellittico completo di 1^a specie nella forma normale di Legendre,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}.$$

Con un po' di algebra si può verificare che

$$\frac{1}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} + 2k^2 \frac{\sin^2 \beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}} - k^4 \frac{\sin^4 \beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Quindi la (21) si riscrive

$$J(k) = E(k) + 2k^2 J_1(k) - k^4 J_2(k) \quad (24)$$

dove

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta$$

è l'integrale ellittico completo di 2^a specie nella forma normale di Legendre, mentre con J_1 e J_2 abbiamo indicato

$$J_1(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta d\beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$J_2(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 \beta d\beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

anche questi possono essere espressi tramite $K(k)$, $E(k)$. Infatti, per quanto riguarda J_1 , è banale verificare che

$$\frac{\sin^2 \beta}{\left\{1 - k^2 \sin^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{\left(1 - k^2 \sin^2 \beta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \right\}$$

cioè

$$J_1(k) = \frac{1}{k^2} [J(k) - K(k)]. \quad (25)$$

Considerando l'identità

$$\sin^4 \beta = \sin^2 \beta (1 - \cos^2 \beta) = \sin^2 \beta - \frac{1}{4} \sin^2 2\beta,$$

J_2 si esprime in questo modo

$$J_2(k) = J_1(k) - \frac{1}{4} J_3(k) \quad (26)$$

con

$$J_3(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\beta \, d\beta}{\{1 - k^2 \sin^2 \beta\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Quest'ultimo integrale, sfruttando l'uguaglianza

$$\frac{\sin^2 2\beta}{\{1 - k^2 \sin^2 \beta\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{k^2 \sin 2\beta} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \right),$$

si riscrive

$$J_3(k) = \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\beta \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \right) d\beta.$$

Integrando per parti ed utilizzando la (22) per $\alpha = 1/2$, si ottiene il risultato

$$J_3(k) = \frac{4(2 - k^2)}{k^4} K(k) - \frac{8}{k^4} E(k). \quad (27)$$

Ora non rimane che inserire questo risultato nella (26), e sostituire le formule (25), (26) nella (24), per ottenere, con un'ulteriore algebra

$$J(k) = -E(k) + (2 - k^2) J(k).$$

Risolvendo rispetto a $J(k)$, si ottiene il risultato, semplice ed elegante,

$$J(k) = \frac{E(k)}{1 - k^2}.$$

Con ciò si vede che $I(k)$ si esprime in termini dei soli integrali ellittici $K(k)$ ed $E(k)$

$$I(k) = \frac{2 - k^2}{k^2} \frac{E(k)}{1 - k^2} - \frac{2}{k^2} K(k).$$

Un'ulteriore sostituzione, (19), permette di ricavare

$$\begin{aligned} B_x &= B_r \cos \phi, \quad B_y = B_r \sin \phi \\ B_z(P) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{Q} \left\{ K(k) + \frac{R^2 - [r^2 + (z - \zeta)^2]}{(r - R)^2 + (z - \zeta)^2} E(k) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

con

$$B_r(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{Q} \frac{z - \zeta}{r} \left\{ -K(k) + \frac{R^2 + [r^2 + (z - \zeta)^2]}{(r - R)^2 + (z - \zeta)^2} E(k) \right\}. \quad (29)$$

$K(k)$ e $E(k)$ sono, rispettivamente, gli integrali ellittici completi di 1^a e 2^a specie nella forma normale di Legendre [Smirnov, 1978; Silov, 1978; Abramowitz e Stegun, 1972]:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Come era naturale aspettarsi, data la simmetria cilindrica del sistema, il calcolo del campo si riduce solo a quello delle componenti radiale, B_r , e longitudinale (lungo l'asse Z), B_z .

A.2 IL CAMPO DEL COBRA

Se il magnete è costituito da N spire, ciascuna con il proprio raggio R_j , percorsa dalla corrente I_j e alla posizione ζ_j , il campo complessivo prodotto nel punto $P(x, y, z)$ è determinato da

$$\left. \begin{aligned} B_r(P) \equiv B_r(r, z) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{Q_j} (z - \zeta_j) \left[-K(k_j) + \frac{P_j^{(+)}}{P_j^{(0)}} E(k_j) \right] \\ B_z(P) \equiv B_z(r, z) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{Q_j} \left[K(k_j) + \frac{P_j^{(-)}}{P_j^{(0)}} E(k_j) \right] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

in cui

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ Q_j &\equiv Q_j(r, z) = \sqrt{(r + R_j)^2 + (z - \zeta_j)^2} \\ k_j &\equiv k_j(r, z) = \frac{\sqrt{4rR_j}}{Q_j} \\ P_j^{(0)} &\equiv P_j^{(0)}(r, z) = (r - R_j)^2 + (z - \zeta_j)^2 \\ P_j^{(+)} &\equiv P_j^{(+)}(r, z) = R_j^2 + [r^2 + (z - \zeta_j)^2] \\ P_j^{(-)} &\equiv P_j^{(-)}(r, z) = R_j^2 - [r^2 + (z - \zeta_j)^2] \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

Uno dei parametri fondamentali del magnete è il valore del campo nell'origine delle coordinate, il quale, data la simmetria speculare, si riduce alla sola componente B_z ($B_r(0, 0) = 0$). Questo parametro è importante perché determina il raggio di curvatura della traiettoria del positrone ($R_c \propto 1/B(0, 0)$), che a sua volta è legato al posizionamento radiale delle camere.

Con qualche semplice manipolazione possiamo esprimere le formule precedenti (30) in termini di³

$$B_0 \equiv |B(0, 0)| \equiv B_z(0, 0) > 0.$$

³ Il segno si spiega considerando la scelta del verso dell'asse Z, nota 1 a pag. 117.

Infatti, essendo

$$\begin{aligned} Q_j(0,0) &= \sqrt{R_j^2 + \zeta_j^2} \\ P_j^{(0)}(0,0) &= R_j^2 + \zeta_j^2 \\ P_j^{(-)}(0,0) &= R_j^2 - \zeta_j^2 \\ k_j(0,0) &= 0 \\ K(0) = E(0) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

si ha

$$B_0 \equiv B_z(0,0) = \frac{\mu_0}{2} H_0^{(N)}$$

con

$$H_0^{(N)} = \sum_{j=1}^N \frac{R_j^2 I_j}{\{R_j^2 + \zeta_j^2\}^{3/2}}.$$

Quindi

$$\frac{\mu_0}{2} = \frac{B_z(0,0)}{H_0^{(N)}} = \frac{B_0}{H_0^{(N)}}$$

e le formule (30) (con le notazioni (31)) si riscrivono

$$\left. \begin{aligned} B_r(r,z) &= \frac{B_0}{\pi H_0^{(N)}} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{Q_j} (z - \zeta_j) \left[-K(k_j) + \frac{P_j^{(+)}}{P_j^{(0)}} E(k_j) \right] \\ B_z(r,z) &= \frac{B_0}{\pi H_0^{(N)}} \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{Q_j} \left[K(k_j) + \frac{P_j^{(-)}}{P_j^{(0)}} E(k_j) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

Quest'ultima scrittura è particolarmente comoda in quanto:

- svincola, in un certo senso, le espressioni dalle unità di misura; le componenti B_r e B_z hanno le stesse unità di B_0 , essendo i fattori $(I/Q)/H_0^{(N)}$ e $(z - \zeta)/r$, così come le espressioni tra quadre, adimensionali; ciò rende possibile l'uso di unità di misura miste, come *kilogauss* per B , *cm* per le lunghezze, *ampere* per le correnti;
- permette di usare correnti fittizie, non necessariamente quelle che determinano B_0 ; le componenti del campo sono lineari nelle correnti I_j e così pure il fattore a denominatore $H_0^{(N)}$, per cui uno *scaling* delle correnti, $I \rightarrow \text{cost.} \cdot I$, non altera le formule (32); ciò rende il calcolo indipendente dai dettagli costruttivi del magnete e lo lega ai parametri fisici che caratterizzano il campo magnetico.

LO SPESSORE DEL TOFF

In questa appendice vogliamo brevemente accennare ai metodi per calcolare lo spessore del volume *tubolare* che contiene tutto il sistema del TOF immerso in atmosfera di azoto. Come si è visto a pagina 73, descrivendo la geometria dei contatori a scintillazione, esso è determinato essenzialmente dall'angolo di rotazione delle barrette esterne.

B.1 IL METODO *approssimato* o *geometrico*

Poiché le barrette sono ruotate dello stesso angolo γ rispetto al piano tangente, τ , alla superficie cilindrica che contiene i loro assi (fig. 4.9, pag. 75), immaginando di *srotolarle*, esse assumono una posizione obliqua come quella mostrata sinteticamente nella figura B.1. Da questa deduciamo facilmente che

$$\widehat{BAH} = \widehat{CBK} \equiv \gamma.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta R &= R_p - R_m \equiv HK \\ &= HB + BK \\ &= AB \sin \gamma + CB \cos \gamma \\ &= l \sin \gamma + d \cos \gamma, \end{aligned}$$

che ci permette di calcolare lo spessore del TOFF con le equazioni (8) e (6).

B.2 IL METODO *esatto* o *numerico*

In questo caso abbiamo realizzato un *programmino* che calcola le distanze radiali degli spigoli A, B, C, D delle barrette (fig. 4.9, pag. 75). Se queste distanze sono r_A, r_B, r_C, r_D , allora

$$\begin{aligned} R_m &= \min(r_A, r_B, r_C, r_D) \\ R_p &= \max(r_A, r_B, r_C, r_D), \end{aligned}$$

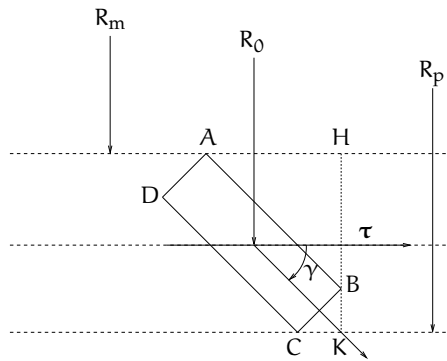


Figura B.1: Configurazione *srotolata* delle barrette

IL VERTICE NEL MONTE CARLO

In questa appendice vogliamo accennare brevemente alla determinazione delle coordinate del vertice negli eventi simulati nel [MC](#), con particolare riferimento alla coordinata z .

C.1 LE COORDINATE x_V E y_V

Nella figura [C.1](#) abbiamo indicato schematicamente il bersaglio, inclinato di un angolo $\alpha = 22^\circ$ rispetto alla linea del fascio, cioè l'asse Z . In essa V rappresenta il vertice di decadimento, ossia il punto in cui si ferma il muone; tale punto si trova ad una distanza d dalla superficie. Il semi-spessore DX del *target* è indicato dal segmento OD . Le coordinate x_V e z_V sono, rispettivamente, i segmenti VB e OB ; y_V , invece, non è visibile nella figura perché l'asse Y va immaginato uscente dal foglio.

A causa dello sparpagliamento gaussiano in atmosfera di elio, le coordinate trasverse del vertice possono essere calcolate come segue

$$\begin{cases} x_V = u_x \cdot \sigma_x \\ y_V = u_y \cdot \sigma_y, \end{cases}$$

dove u_x e u_y sono due numeri pseudo-casuali con distribuzione normale, mentre σ_x e σ_y misurano l'entità dello scostamento rispetto alla linea ideale rappresentata dall'asse Z . Più articolato è il calcolo della coordinata z_V .

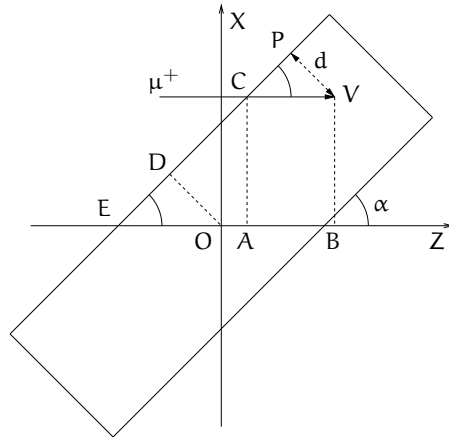


Figura C.1: Determinazione del vertice di decadimento

C.2 LA COORDINATA z_V

Sempre con riferimento alla figura C.1, possiamo riassumere

$$\begin{aligned} d &\equiv PV \\ \alpha &\equiv \widehat{PCV} = \widehat{DEO} \\ x_V &\equiv VB = CA \\ DX &\equiv OD \\ z_V &\equiv OB. \end{aligned}$$

Però abbiamo $OB = OA + AB$ e $OA = EA - EO$, per cui, essendo

$$\begin{aligned} AB &\equiv CV = \frac{PV}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha} \\ EO &= \frac{OD}{\sin \alpha} = \frac{DX}{\sin \alpha} \\ EA &= CA \cdot \cotg \alpha = x_V \cdot \cotg \alpha, \end{aligned}$$

otteniamo

$$z_V = OB = EA - EO + AB = x_V \cdot \cotg \alpha - \frac{DX}{\sin \alpha} + \frac{d}{\sin \alpha}$$

che rappresenta l'equazione (10). Nel calcolo finale, d è calcolato con distribuzione gaussiana attorno alla media \bar{d} , ossia

$$d = \bar{d} + u \cdot \sigma,$$

dove u è un numero pseudo-casuale distribuito normalmente.

C.3 VERIFICA DEL VERTICE

Poiché le coordinate di V dipendono dai numeri (u_x, u_y, u) , distribuiti normalmente, esiste sempre qualche probabilità che abbiano valori sufficientemente grandi tali che V cada fuori il bersaglio!¹ Quindi è necessario fare una verifica. Questa risulta molto semplice se si trasformano le coordinate di V dal MRS al DRS. Infatti nel DRS il bersaglio è semplicemente un BOX di dimensioni $2 \times (DX, DY, DZ)$. Se (x', y', z') sono le coordinate di V nel DRS, è sufficiente verificare che

$$|x'| < DX, \quad |y'| < DY, \quad |z'| < DZ.$$

Le coordinate di V nel DRS si ottengono semplicemente con la trasformazione

$$\begin{cases} z' = \cos \alpha \cdot x_V + \sin \alpha \cdot z_V \\ x' = -\sin \alpha \cdot x_V + \cos \alpha \cdot z_V \\ y' = y_V, \end{cases}$$

che è semplicemente una rotazione di un angolo α attorno all'asse Y (si osservi anche la figura 4.5).

¹ Per esempio, $\mathcal{P}(|u| > 1) \approx 1 - 68\% = 32\%$, $\mathcal{P}(|u| > 2) \approx 1 - 95\% = 5\% \dots$

LA DEFINIZIONE DEGLI ANGOLI D'IMPATTO

Definizione di α

La figura D.1 riassume brevemente la definizione dell'angolo α (si faccia riferimento anche alla figura 4.12). In essa possiamo notare:

- la traccia del positrone e^+ al punto d'impatto I nella barretta;
- la componente trasversa \mathbf{p}_T dell'impulso del positrone nel punto d'impatto I;
- gli assi X_D e Y_D del riferimento associato con la barretta (l'asse Z_D esce dal piano della figura), cioè il DRS; \mathbf{n} e \mathbf{j} sono i versori, rispettivamente, degli assi X_D e Y_D .

L'angolo α è definito come l'angolo tra \mathbf{p}_T e \mathbf{n} , la *normale esterna* delle barretta. Per cui

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{p}_T \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{p}_T|}$$

Si può definire \mathbf{p}_T in termini dell'impulso totale \mathbf{p} ,

$$\mathbf{p}_T = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{j})^2}}$$

avendo utilizzato $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0$. Nel DRS le componenti sono $\mathbf{p} = (p_x^D, p_y^D, p_z^D)$, $\mathbf{p}_T = (p_x^D, p_y^D, 0)$ e $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, per cui

$$\cos \alpha = \frac{p_x^D}{\sqrt{(p_x^D)^2 + (p_y^D)^2}}$$

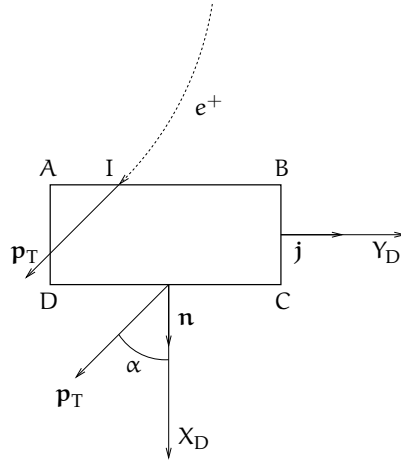
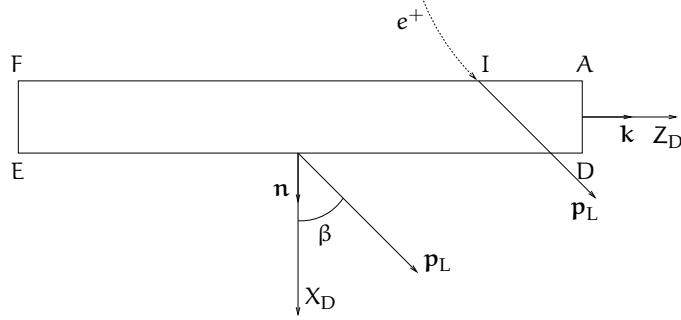
Definizione di β

Nella figura D.2 è rappresentata (nel DRS) la sezione longitudinale (cioè quella contenente l'asse maggiore) della barretta. La proiezione longitudinale dell'impulso nel punto d'impatto I è indicata nella figura con \mathbf{p}_L , mentre \mathbf{k} è il versore lungo l'asse Z_D . In termini dell'impulso \mathbf{p} del positrone si ha:

$$\mathbf{p}_L = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}.$$

Come si vede, l'angolo β è quello tra \mathbf{p}_L e la normale esterna \mathbf{n} . Dunque,

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{p}_L \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{p}_L|},$$

Figura D.1: La definizione dell'angolo α Figura D.2: La definizione dell'angolo β

ossia

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2 + (p_z)^2}},$$

in cui $p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}$ è la componente z dell'impulso (uguale nei riferimenti [MARS](#) e [DRS](#)), e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$. Il $\cos \beta$ si calcola facilmente in [DRS](#). Infatti in questo riferimento si vede facilmente che è dato da

$$\cos \beta = \frac{p_x^D}{\sqrt{(p_x^D)^2 + (p_z^D)^2}},$$

essendo $\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \equiv p_z \equiv p_z^D$.

Definizione dell'angolo θ

L'angolo θ è semplicemente quello tra l'impulso \mathbf{p} nel punto d'impatto I e la normale esterna \mathbf{n} della barretta, come mostra la figura [D.3](#), cioè

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{p}|}$$

Anche in questo caso tutto risulta più semplice nel [DRS](#),

$$\cos \theta = \frac{p_x^D}{\sqrt{(p_x^D)^2 + (p_y^D)^2 + (p_z^D)^2}}.$$

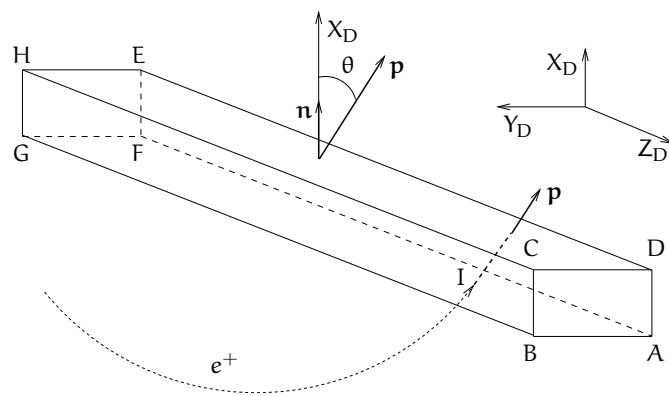


Figura D.3: La definizione dell'angolo θ

BIBLIOGRAFIA

- AARNIO, P. A. *et al.* (1987), «[FLUKA](#) user's guide», Rap. Tecn. TIS-RP-190, [CERN](#). (Citato a pagina [67](#).)
- ABELA, R. *et al.* (1996), «Improved Upper Limit on Muonium to Antimuonium Conversion», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 1950–1953. (Citato a pagina [41](#).)
- ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I. A. (1972), *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover books on intermediate advanced mathematics, US. Nat. Bureau Stand., New York, NY, <http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands>. (Citato a pagina [123](#).)
- ABREU, P. *et al.* (1997), «Search for lepton flavor number violating Z^0 decays», *Z. Phys. C*, vol. 73, pp. 243–251. (Citato a pagina [30](#).)
- [FSF](#) (1999), «Fortran», home page, <http://www.gnu.org/software/fortran>. (Citato a pagina [97](#).)
- AHARMIM, B. *et al.* (2005), «Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of ^8B solar neutrinos from measurements with NaCl dissolved in the heavy-water detector at the Sudbury Neutrino Observatory», *Phys. Rev. C*, vol. 72, p. 055502. (Citato a pagina [16](#).)
- AHMAD, Q. R. *et al.* (2001), «Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 071301. (Citato a pagina [16](#).)
- AHMAD, Q. R. *et al.* (2002a), «Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 011301. (Citato a pagina [16](#).)
- AHMAD, Q. R. *et al.* (2002b), «Measurement of day and night neutrino energy spectra at [SNO](#) and constraints on neutrino mixing parameters», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 011302. (Citato a pagina [16](#).)
- AHMAD, S. *et al.* (1988), «Search for muon-electron and muon-positron conversion», *Phys. Rev. D*, vol. 38, pp. 2102–2120. (Citato a pagina [40](#).)
- AHMED, S. N. *et al.* (2004), «Measurement of the Total Active ^8B Solar Neutrino Flux at the Sudbury Neutrino Observatory with Enhanced Neutral Current Sensitivity», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 181301. (Citato a pagina [16](#).)
- AHN, M. H. *et al.* (2006), «Measurement of neutrino oscillation by the [K2K](#) experiment», *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 072003, [[hep-ex/0606032](#)]. (Citato a pagina [14](#).)
- AKERS, R. *et al.* (1995), «A Search for lepton flavor violating Z^0 decays», *Z. Phys. C*, vol. 67, pp. 555–564. (Citato a pagina [30](#).)
- ALLISON, J. *et al.* (1991), «The diamond shaped cathode pads of the [OPAL](#) muon barrel drift chambers», *NIM A*, vol. 310, pp. 527–534. (Citato a pagina [52](#).)
- AMALDI, E., BIZZARRI, R. e PIZZELLA, G. (1986), *Fisica Generale*, Zanichelli Editore. (Citato alle pagine [92](#), [93](#) e [117](#).)

- AMALDI, U., DE BOER, W. e FÜRSTENAU, H. (1991), «Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP», *Phys. Lett. B*, vol. 260, pp. 447–455. (Citato a pagina 19.)
- AMBROSE, D. *et al.* (1998), «New Limit on Muon and Electron Lepton Number Violation from $K_L^0 \rightarrow \mu e$ Decay», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 5734–5737. (Citato a pagina 30.)
- AMSLER, C. *et al.* (2008), «Particle Data Group», *Phys. Lett. B*, vol. 667, p. 1, <http://pdg.lbl.gov>. (Citato alle pagine 19, 30 e 80.)
- APOLLONIO, M. *et al.* (1999), «Limits on neutrino oscillations from the CHOOZ experiment», *Phys. Lett. B*, vol. 466, pp. 415–430, [[hep-ex/9907037](http://arxiv.org/abs/hep-ex/9907037)]. (Citato a pagina 13.)
- APOLLONIO, M. *et al.* (2003), «Search for neutrino oscillations on a long base-line at the CHOOZ nuclear power station», *Eur. Phys. J. C*, vol. 27, pp. 331–374, [[hep-ex/0301017](http://arxiv.org/abs/hep-ex/0301017)]. (Citato a pagina 13.)
- ARISAKA, K. *et al.* (1998), «Search for the lepton-family number violating decays $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \mu^+ e^-$ », *Phys. Lett. B*, vol. 432, pp. 230–234. (Citato a pagina 30.)
- ATHANASSOPOULOS, C. *et al.* (1998), «Results on $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ Neutrino Oscillations from the LSND Experiment», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 1774–1777. (Citato a pagina 14.)
- BADERTSCHER, A. *et al.* (1982), «A search for muon-electron and muon-positron conversion in sulfur», *Nucl. Phys. A*, vol. 377, pp. 406–440. (Citato a pagina 40.)
- BALDINI, A. *et al.* (2000), «Note on the magnet design and the positron spectrometer simulation for the $\mu \rightarrow e\gamma$ search at PSI», Rap. tecn., INFN, http://meg.web.psi.ch/docs/prop_psi/magnet.ps. (Citato a pagina 49.)
- BARANOV, V. A. *et al.* (1991), «Search for $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ decay», *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 53, pp. 802–807. (Citato a pagina 39.)
- BARBIERI, R. e HALL, L. J. (1994), «Signals for Supersymmetric Unification», *Phys. Lett. B*, vol. 338, pp. 212–218. (Citato a pagina 23.)
- BARBIERI, R., HALL, L. J. e STRUMIA, A. (1995), «Violations of lepton flavour and CP in supersymmetric unified theories», *Nucl. Phys. B*, vol. 445, pp. 219–251. (Citato alle pagine 23 e 24.)
- BECKER, R. (1941), *Teoria della Eletticità*, vol. I, Sansoni Edizioni Scientifiche. (Citato a pagina 117.)
- BEER, G. A. *et al.* (1986), «Emission of Muonium into Vacuum from a Silica-Powder Layer», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 671–674. (Citato a pagina 41.)
- BELLGARDT, U. *et al.* (1988), «Search for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ », *Nucl. Phys. B*, vol. 299, pp. 1–6. (Citato alle pagine 30 e 39.)
- BERTL, W. *et al.* (1984), «A new upper limit for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ », *Phys. Lett. B*, vol. 140, pp. 299–303. (Citato a pagina 39.)
- BERTL, W. *et al.* (1985), «Search for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ », *Nucl. Phys. B*, vol. 260, pp. 1–31. (Citato a pagina 39.)

- BILENKY, S. M., PETCOV, S. T. e PONTECORVO, B. (1977), «Lepton mixing, $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ decay and neutrino oscillations», *Phys. Lett. B*, vol. 67, pp. 309–312. (Citato a pagina 21.)
- BILENKY, S. M. e PONTECORVO, B. (1978), «Lepton Mixing and Neutrino Oscillations», *Phys. Rep.*, vol. 41, pp. 225–265. (Citato a pagina 12.)
- BIRSA, R. *et al.* (1977), «Reconstruction of the momentum of a particle moving in an axially symmetric magnetic field», *NIM*, vol. 146, pp. 357–365. (Citato a pagina 91.)
- BLISS, D. W. *et al.* (1998), «New limits for neutrinoless tau decays», *Phys. Rev. D*, vol. 57, pp. 5903–5907. (Citato a pagina 30.)
- BOLTON, R. D. *et al.* (1984), «Search for the Muon-Number-Nonconserving Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 1425–1428. (Citato a pagina 39.)
- BOLTON, R. D. *et al.* (1988), «Search for rare muon decays with the Crystal Box detector», *Phys. Rev. D*, vol. 38, pp. 2077–2101. (Citato alle pagine 36, 38 e 39.)
- BORZUMATI, F. e MASIERO, A. (1986), «Large Muon- and Electron-Number Nonconservation in Supergravity Theories», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 961–964. (Citato a pagina 21.)
- BROOKS, M. L. *et al.* (1999), «New Limit for the Lepton-Family-Number Nonconserving Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 1521–1524. (Citato alle pagine 4, 23, 30, 37, 38 e 43.)
- BROWN, K. L., CAREY, D. C., ISELIN, F. C. e ROTHACKER, F. (1973), *TRANSPORT: a computer program for designing charged-particle beam transport systems*, CERN, Ginevra. (Citato a pagina 46.)
- BROWN, K. L. e ISELIN, F. C. (1974), *DECAY TURTLE: a computer program for simulating charged-particle beam transport systems, including decay calculations*, CERN, Ginevra. (Citato a pagina 46.)
- BRUN, R., RADEMAKERS, F., CANAL, P., ANTICHEVA, I. e BUSKULIC, D. (2008), *ROOT: An Object-Oriented Data Analysis Framework: Users Guide 5.20*, CERN, Ginevra, <http://root.cern.ch>. (Citato a pagina 83.)
- BRYMAN, D. A., BLECHER, M., GOTOW, K. e POWERS, R. J. (1972), «Search for the Reaction $\mu^- \text{Cu} \rightarrow e^+ \text{Co}$ », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 1469–1471. (Citato a pagina 40.)
- BRYMAN, D. A. *et al.* (1985), «Search for $\mu - e$ conversion in Ti», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 465–468. (Citato a pagina 40.)
- CERN (2007), «SLC4», home page, <http://linux.web.cern.ch/linux/scientific4>. (Citato a pagina 97.)
- CLEVELAND, B. T. *et al.* (1998), «Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector», *ApJ*, vol. 496, pp. 505–526. (Citato a pagina 12.)
- COLEMAN, S. e MANDULA, J. (1967), «All Possible Symmetries of the S Matrix», *Phys. Rev.*, vol. 159, pp. 1251–1256. (Citato a pagina 17.)

- CONVERSI, M., PANCINI, E. e PICCIONI, O. (1947), «On the Disintegration of Negative Mesons», *Phys. Rev.*, vol. 71, pp. 209–210. (Citato a pagina 3.)
- COUET, O. e GOOSSENS, M. (1999), *PAW: Physics Analysis Workstation, long writeup Q121*, CERN Program Library, CERN, Ginevra, <http://paw.web.cern.ch/paw>. (Citato alle pagine 83 e 95.)
- DANBY, G. *et al.* (1962), «Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 9, pp. 36–44. (Citato a pagina 4.)
- DAVIS, R., HARMER, D. S. e HOFFMAN, K. C. (1968), «Search for Neutrinos from the Sun», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 20, pp. 1205–1209. (Citato a pagina 25.)
- DEPOMMIER, P. *et al.* (1977), «New Limit on the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 39, pp. 1113–1116. (Citato alle pagine 36 e 38.)
- DIMOPOULOS, S. e GEORGI, H. (1981), «Softly broken supersymmetry and SU(5) », *Nucl. Phys. B*, vol. 193, pp. 150–162. (Citato a pagina 19.)
- DIMOPOULOS, S. e SUTTER, D. (1995), «The supersymmetric flavor problem», *Nucl. Phys. B*, vol. 452, pp. 496–512. (Citato a pagina 19.)
- DOHMEN, C. *et al.* (1993), «Test of lepton-flavour conservation in $\mu - e$ conversion conversion on titanium», *Phys. Lett. B*, vol. 317, pp. 631–636. (Citato a pagina 40.)
- EADIE, W. T., DRIJARD, D., JAMES, F. E., ROOS, M. e SADOULET, B. (1971), *Statistical methods in experimental physics*, North-Holland, Amsterdam. (Citato alle pagine 87 e 105.)
- ECKSTEIN, S. G. e PRATT, R. H. (1959), «Radiative muon decay», *Ann. Phys.*, vol. 8, pp. 297–309. (Citato a pagina 30.)
- EDWARDS, K. W. *et al.* (1997), «Search for neutrinoless τ decays: $\tau \rightarrow e \gamma$ and $\tau \rightarrow \mu \gamma$ », *Phys. Rev. D*, vol. 55, pp. R3919–R3923. (Citato a pagina 30.)
- EICHINGER, H. e REGLER, M. (1981), «Review of track-fitting methods in counter experiments», Rap. Tecn. Cern Yellow Report 81-06, CERN, Geneva, http://documents.cern.ch/cgi-bin/setlink?base=cernrep&categ=Yellow_Report&id=1981-006. (Citato alle pagine 91 e 94.)
- EITEL, K. *et al.* (1999), «KARMEN: Neutrino oscillation limits and new results with the upgrade», *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.*, vol. 70, pp. 210–213. (Citato a pagina 14.)
- ELLIS, J., KELLEY, S. e NANOPOULOS, D. V. (1991), «Probing the desert using gauge coupling unification», *Phys. Lett. B*, vol. 260, pp. 131–137. (Citato a pagina 19.)
- FEINBERG, G. (1958), «Decays of the μ Meson in the Intermediate-Meson Theory», *Phys. Rev.*, vol. 110, pp. 1482–1483. (Citato a pagina 3.)
- FEINBERG, G. e WEINBERG, S. (1961), «Conversion of Muonium into Antimuonium», *Phys. Rev.*, vol. 123, pp. 1439–1443. (Citato a pagina 41.)
- FESEFELDT, H. C. (1985), «Simulation of hadronic showers, physics and applications», Rap. Tecn. PITHA 85-02, III Physikalisches Institut, RWTH Aachen Physikzentrum, 5100 Aachen, Germany. (Citato a pagina 67.)

- FEYNMAN, R. P. e GELL-MANN, M. (1958), «Theory of the Fermi Interaction», *Phys. Rev.*, vol. 109, pp. 193–198. (Citato a pagina 3.)
- FLETCHER, R. (1970), «A new approach to variable metric algorithms», *Comput. J.*, vol. 13, p. 317. (Citato a pagina 87.)
- FRONSDAL, C. e ÜBERALL, H. (1959), « μ -Meson Decay with Inner Bremsstrahlung», *Phys. Rev.*, vol. 113, pp. 654–657. (Citato a pagina 30.)
- FUKUDA, Y. *et al.* (1998), «Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 1562–1567, [Super-Kamiokande Collaboration]. (Citato a pagina 12.)
- FUKUDA, Y. *et al.* (1999), «Measurement of the Solar Neutrino Energy Spectrum Using Neutrino-Electron Scattering», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 2430–2434, [Super-Kamiokande Collaboration]. (Citato a pagina 12.)
- FUKUDA, Y. *et al.* (2001), «Constraints on Neutrino Oscillations Using 1258 Days of Super-Kamiokande Solar Neutrino Data», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, pp. 5656–5660, [Super-Kamiokande Collaboration]. (Citato a pagina 12.)
- GAUSS, C. F. (1874), *Werke. Bd. 6. Astronomische Abhandlungen*, Koeniglichen Gessellschaft der Wissen, Goettingen, http://www.wilbourhall.org/pdfs/Carl_Friedrich_Gauss_Werke___6.pdf. (Citato a pagina 87.)
- GELL-MANN, M. (1964), «A Schematic Model of Baryons and Mesons», *Phys. Lett.*, vol. 8, pp. 214–215. (Citato a pagina 8.)
- GELL-MANN, M., RAMOND, P. e SLANSKY, R. (1979), «Complex Spinors and Unified Theories», in «Supergravity: Proceedings of the Supergravity Workshop at Stony Brook», pp. 315–321, Amsterdam, North-Holland. (Citato a pagina 20.)
- GEORGI, H. e GLASHOW, S. L. (1974), «Unity of All Elementary-Particle Forces», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 32, pp. 438–441. (Citato a pagina 19.)
- GLASHOW, S. L. (1961), «Partial symmetries of weak interactions», *Nucl. Phys.*, vol. 22, pp. 579–588. (Citato a pagina 8.)
- GOOSSENS, M. (1994), *GEANT: Detector Description and Simulation Tool, long writeup W5013*, CERN Program Library, CERN, Ginevra, <http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/pdfdir/geant.pdf>. (Citato a pagina 61.)
- GORDEEV, V. A. *et al.* (1997), «New method for investigating muonium-to-antimuonium conversion», *Phys. At. Nucl.*, vol. 60, pp. 1164–1178. (Citato a pagina 41.)
- GULER, M. (2000), «*OPERA* experiment proposal», Rap. Tecn. SPSC 2000-028, CERN. (Citato a pagina 14.)
- HAAG, R., LOPUSZANSKI, J. T. e SOHNUS, M. (1975), «All possible generators of supersymmetries of the S-matrix», *Nucl. Phys. B*, vol. 88, pp. 257–274. (Citato a pagina 17.)
- HABER, H. E. e KANE, G. L. (1985), «The search for supersymmetry: Probing physics beyond the standard model», *Phys. Rep.*, vol. 117, pp. 75–263. (Citato a pagina 17.)
- HALZEN, F. e MARTIN, A. D. (1984), *Quarks and Leptons: An introductory course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons. (Citato a pagina 5.)

- HELMER, R. (2000a), «The Sudbury Neutrino Observatory», *NIM A*, vol. 449, pp. 172–207. (Citato a pagina 15.)
- HELMER, R. (2000b), «The Sudbury Neutrino Observatory», *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 2087–2081. (Citato a pagina 15.)
- HIGGS, P. W. (1964), «Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields», *Phys. Lett.*, vol. 12, pp. 132–133. (Citato a pagina 10.)
- HINCKS, E. P. e PONTECORVO, B. (1948), «Search for Gamma-Radiation in the 2.2-Microsecond Meson Decay Process», *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 257–258. (Citato alle pagine 3 e 36.)
- HIRATA, K. S. *et al.* (1989), «Observation of ^8B solar neutrinos in the Kamiokande-II detector», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 63, pp. 16–19. (Citato a pagina 25.)
- HIRATA, K. S. *et al.* (1990), «Results from one thousand days of real-time, directional solar-neutrino data», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, pp. 1297–1300. (Citato a pagina 25.)
- HISANO, J., MOROI, T., TOBE, K. e YAMAGUCHI, M. (1996), «Lepton-flavor violation via right-handed neutrino Yukawa couplings in the supersymmetric standard model», *Phys. Rev. D*, vol. 53, pp. 2442–2459. (Citato a pagina 25.)
- HISANO, J., MOROI, T., TOBE, K. e YAMAGUCHI, M. (1997a), «Exact event rates of lepton flavor violating processes in supersymmetric SU(5) model», *Phys. Lett. B*, vol. 391, pp. 341–350. (Citato a pagina 23.)
- HISANO, J., MOROI, T., TOBE, K. e YAMAGUCHI, M. (1997b), «Exact event rates of lepton flavor violating processes in supersymmetric SU(5) model [Phys. Lett. B 391 (1997) 341]», *Phys. Lett. B*, vol. 397, p. 357. (Citato a pagina 23.)
- HISANO, J., MOROI, T., TOBE, K., YAMAGUCHI, M. e YANAGIDA, T. (1995), «Lepton-flavor violation in the supersymmetric standard model with seesaw-induced neutrino masses», *Phys. Lett. B*, vol. 357, pp. 579–587. (Citato a pagina 25.)
- HISANO, J. e NOMURA, D. (1999), «Solar and atmospheric neutrino oscillations and lepton flavor violation in supersymmetric models with right-handed neutrinos», *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 116005. (Citato a pagina 25.)
- HISANO, J., NOMURA, D., OKADA, Y., SHIMIZU, Y. e TANAKA, M. (1998), «Enhancement of $\mu \rightarrow e\gamma$ in the supersymmetric SU(5) GUT at large $\tan\beta$ », *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 116010. (Citato a pagina 25.)
- HONECKER, W. *et al.* (1996), «Improved Limit on the Branching Ratio of $\mu - e$ conversion on Lead», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 200–203. (Citato a pagina 40.)
- HUBER, T. M. *et al.* (1990), «Search for mixing of muonium and antimuonium», *Phys. Rev. D*, vol. 41, pp. 2709–2725. (Citato a pagina 41.)
- HUGHES, V. W., MCCOLM, D. W., ZIOCK, K. e PREPOST, R. (1960), «Formation of Muonium and Observation of its Larmor Precession», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 5, pp. 63–65. (Citato a pagina 41.)
- JAMES, F. (1998), *MINUIT: Function Minimization and Error Analysis, long writeup D506*, CERN Program Library, CERN, Ginevra. (Citato alle pagine 61 e 86.)

- KALMAN, R. E. (1960), «A new approach to linear filtering and prediction problems», *Trans. ASME, D*, vol. 82, pp. 35–44. (Citato a pagina 107.)
- KIELCZEWSKA, D. *et al.* (2000), «Neutrino oscillations at Super-Kamiokande», *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.*, vol. 81, pp. 133–142, [Super-Kamiokande Collaboration]. (Citato a pagina 12.)
- KINNISON, W. W. *et al.* (1982), «Search for $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ », *Phys. Rev. D*, vol. 25, pp. 2846–2868. (Citato a pagina 38.)
- KORENCHENKO, S. M., KOSTIN, B. F., MITSSELMACHER, G., NEKRASOV, K. G. e SMIRNOV, V. S. (1976), «Search for $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ Decay», *Sov. Phys. JETP*, vol. 43, p. 1. (Citato a pagina 39.)
- KROLAK, P. *et al.* (1994), «A limit on the lepton-family number violating process $\pi^0 \rightarrow \mu e$ », *Phys. Lett. B*, vol. 320, pp. 407–410. (Citato a pagina 30.)
- KUNO, Y., MAKI, A. e OKADA, Y. (1997), «Background suppression for $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ with polarized muons», *Phys. Rev. D*, vol. 55, pp. R2517–R2520. (Citato alle pagine 31 e 34.)
- KUNO, Y. e OKADA, Y. (1996), «Proposed $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ Search with Polarized Muons», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 434–437. (Citato alle pagine 31 e 32.)
- LAGARRIGUE, A. e PEYROU, C. (1952), «Capture of Negative μ Mesons in Copper and Tin», *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, vol. 234, pp. 1873–1875. (Citato a pagina 3.)
- LANDAU, L. D. (1944), «On the energy loss of fast particles by ionization», *J. Phys.*, vol. 8, pp. 201–205. (Citato a pagina 99.)
- LANDAU, L. D. e LIFSHITZ, E. M. (1978a), *Fisica Teorica - Teoria dei Campi*, vol. II, Editori Riuniti. (Citato a pagina 92.)
- LANDAU, L. D. e LIFSHITZ, E. M. (1978b), *Fisica Teorica - Teoria Quantistica Relativistica*, vol. IV, Editori Riuniti. (Citato a pagina 17.)
- LANGACKER, P. e LUO, M. (1991), «Implications of precision electroweak experiments for m_t , ρ_0 , $\sin^2 \theta_W$, and grand unification», *Phys. Rev. D*, vol. 44, pp. 817–822. (Citato a pagina 19.)
- LEE, A. M. *et al.* (1990), «Improved limit on the branching ratio of $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ e^-$ », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 165–168. (Citato a pagina 30.)
- LEE, T. D. (1981), *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Pub. (Citato alle pagine 5 e 80.)
- LOKANATHAN, S. e STEINBERGER, J. (1955), «Search for Improbable Meson Decays», *Phys. Rev.*, vol. 98, p. 240. (Citato a pagina 3.)
- LYUBIMOV, V. A. (1980), «An estimate of the ν_e mass from the β -spectrum of tritium in the valine molecule», *Phys. Lett. B*, vol. 94, pp. 266–268. (Citato a pagina 11.)
- MAKI, Z., NAKAGAWA, M. e SAKATA, S. (1962), «Remarks on the Unified Model of Elementary Particles», *Prog. Theor. Phys.*, vol. 28, pp. 870–880. (Citato a pagina 12.)
- MANDL, F. e SHAW, G. (1984), *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons. (Citato alle pagine 5, 6 e 11.)

- MARCIANO, W. J. e SANDA, A. I. (1977), «Reaction $\mu^- + \text{Nucleus} \rightarrow e^- + \text{Nucleus}$ in Gauge Theories», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 38, pp. 1512–1515. (Citato a pagina [41](#).)
- MARSHALL, G. M., WARREN, J. B., ORAM, C. J. e KIEFL, R. F. (1982), «Search for muonium-to-antimuonium conversion», *Phys. Rev. D*, vol. 25, pp. 1174–1180. (Citato a pagina [41](#).)
- MATTHIAS, B. E. *et al.* (1991), «New search for the spontaneous conversion of muonium to antimuonium», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, pp. 2716–2719. (Citato a pagina [41](#).)
- MIKHEYEV, S. P. e SMIRNOV, A. Y. (1985), «Resonance Enhancement of Oscillations in Matter and Solar Neutrino Spectroscopy», *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 42, p. 913. (Citato a pagina [25](#).)
- MORI, T. *et al.* (1999), «Search for $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ down to 10^{14} branching ratio», Rap. Tecn. R-99.05.01, [PSI](#). (Citato alle pagine [23](#), [43](#), [79](#) e [112](#).)
- NAMBU, Y. e JONA-LASINIO, G. (1961a), «Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I», *Phys. Rev.*, vol. 122, pp. 345–358. (Citato a pagina [7](#).)
- NAMBU, Y. e JONA-LASINIO, G. (1961b), «Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II», *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 246–254. (Citato a pagina [7](#).)
- NEDDERMEYER, S. H. e ANDERSON, C. D. (1937), «Note on the Nature of Cosmic-Ray Particles», *Phys. Rev.*, vol. 51, pp. 884–886. (Citato a pagina [3](#).)
- NELDER, J. A. e MEAD, R. (1965), «A Simplex Method for Function Minimization», *Comput. J.*, vol. 7, pp. 308–313. (Citato a pagina [87](#).)
- NI, B. *et al.* (1993), «Search for spontaneous conversion of muonium to antimuonium», *Phys. Rev. D*, vol. 48, pp. 1976–1989. (Citato a pagina [41](#).)
- NILLES, H. P. (1984), «Supersymmetry, supergravity and particle physics», *Phys. Rep.*, vol. 110, pp. 1–162. (Citato a pagina [17](#).)
- NISHIJIMA, K. (1957), «Vanishing of the Neutrino Rest Mass», *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 907–908. (Citato a pagina [3](#).)
- OKUN, L. B. (1986), *Leptoni e Quark*, Editori Riuniti. (Citato a pagina [80](#).)
- PARKER, S., ANDERSON, H. L. e REY, C. (1964), «Search for the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ », *Phys. Rev.*, vol. 133, pp. B768–B778. (Citato a pagina [36](#).)
- PERKINS, D. H. (1982), *Introduction to High Energy Physics*, Addison-Wesley Pub. (Citato a pagina [12](#).)
- PETCOV, S. T. (1977), «The Processes $\mu \rightarrow e \gamma$, $\mu \rightarrow ee\bar{e}$, $\nu' \rightarrow \nu \gamma$ in the Weinberg-Salam Model with Neutrino Mixing», *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 25, p. 340. (Citato a pagina [21](#).)
- PIFER, A. E. *et al.* (1976), «A high stopping density μ^+ beam», *NIM*, vol. 135, p. 39. (Citato a pagina [45](#).)
- PONTECORVO, B. (1957), «Mesonium and antimesonium», *Sov. Phys. JETP*, vol. 6, p. 429. (Citato a pagina [41](#).)

- PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A. e VETTERLING, W. T. (1992), *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, <http://www.nr.com>. (Citato alle pagine 63, 69, 89 e 94.)
- REIST, H.-W. *et al.* (1978), «Development of a low-momentum *surface* muon beam for LAMPF», *NIM*, vol. 153, p. 61. (Citato a pagina 45.)
- RITT, S. (2001), «MIDAS», home page, <https://midas.psi.ch>. (Citato a pagina 57.)
- SAKAI, N. (1981), «Naturalness in Supersymmetric Guts», *Zeit. Phys. C*, vol. 11, p. 153. (Citato a pagina 19.)
- SALAM, A. (1968), «Weak and Electromagnetic Interactions», in «Proc. of the 8th Nobel Symposium on *Elementary Particle Theory, Relativistic Groups and Analyticity*», pp. 367–377, Stoccolma, Svezia. (Citato a pagina 11.)
- SCHWINGER, J. (1957), «A theory of the fundamental interactions», *Ann. Phys.(N.Y.)*, vol. 2, pp. 407–434. (Citato a pagina 3.)
- SHAEVITZ, M. H. (1983), «Experimental Results on Neutrino Masses and Neutrino Oscillations», in «Proc. of the 11th International Symposium on *Lepton And Photon Interactions At High Energies*», pp. 132–176, Ithaca, New York. (Citato a pagina 11.)
- SHIERS, J. e GOOSSENS, M. (1996), *CERNLIB, short writeups*, CERN Program Library, CERN, Ginevra, <http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/psdir/shortwrups.dir/cernlib.ps.gz>. (Citato alle pagine 80 e 117.)
- SILOV, G. E. (1978), *Analisi Matematica*, vol. I, Edizioni Mir. (Citato a pagina 123.)
- SMIRNOV, V. I. (1978), *Corso di Matematica Superiore*, vol. III–2^a parte, Editori Riuniti. (Citato a pagina 123.)
- STEINBERGER, J. (1948), «On the Range of the Electrons in Meson Decay», *Phys. Rev.*, vol. 74, pp. 500–501. (Citato a pagina 3.)
- STEINBERGER, J. e WOLFE, H. B. (1955), «Electrons from Muon Capture», *Phys. Rev.*, vol. 100, pp. 1490–1493. (Citato a pagina 3.)
- VAN DER SCHAAF, A. *et al.* (1980), «A search for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ », *Nucl. Phys. A*, vol. 340, pp. 249–270. (Citato alle pagine 37 e 38.)
- WEINBERG, S. (1967), «A model of leptons», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, pp. 1264–1266. (Citato a pagina 11.)
- WEINBERG, S. (2000), *The Quantum Theory of Fields: Supersymmetry*, vol. III, Cambridge University Press, Cambridge, UK. (Citato a pagina 17.)
- WEINBERG, S. e FEINBERG, G. (1959), «Electromagnetic Transitions Between μ Meson and Electron», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 3, pp. 111–114, 244E. (Citato a pagina 41.)
- WILLMANN, L. e JUNGSMANN, K. (1997), «The muonium atom as a probe of physics beyond the standard model», *Physics*, vol. 499, p. 43. (Citato a pagina 41.)
- WILLMANN, L. *et al.* (1999), «New Bounds from a Search for Muonium to Antimuonium Conversion», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 49–52. (Citato alle pagine 30 e 41.)

- WINTZ, P. (1998), «Results of the [SINDRUM-II](#) experiment», in «Proceedings of the First International Symposium on Lepton and Baryon Number Violation», pp. 534–546, Bristol, Philadelphia. (Citato alle pagine [30](#) e [40](#).)
- WOLFENSTEIN, L. (1978), «Neutrino oscillations in matter», *Phys. Rev. D*, vol. 17, pp. 2369–2374. (Citato a pagina [25](#).)
- YANAGIDA, T. (1979), «Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos», in «Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories», p. 95, Tsukuba, Japan. (Citato a pagina [20](#).)
- YANG, C. N. e MILLS, R. L. (1954), «Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance», *Phys. Rev.*, vol. 96, pp. 191–195. (Citato a pagina [6](#).)
- YUKAWA, H. (1935), «On the interaction of elementary particles. I», *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, vol. 17, pp. 48–57. (Citato a pagina [3](#).)
- ZWEIG, G. (1964), «An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking», Rap. Tecn. 8182/TH 401, [CERN](#). (Citato a pagina [8](#).)